VWO
B
DEEL 4

GETAL& RUIMTE 4

NOORDHOFF UITGEVERS

GETAL& RUIMTE

vwo B deel 4

ELFDE EDITIE, 2017

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers Groningen

Voorwoord

Aan de docent(e),

Het boek vwo B deel 4

Samen met de delen 1, 2 en 3 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van het jaar 2015 is vastgesteld. De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur.
Dit boek is bestemd voor het zesde leerjaar. De hoofdstukken 13, 14 en 15 hebben elk een studielast van ongeveer 25 uur. Daarmee komt de totale studielast van de eerste 15 hoofdstukken plus het hoofdstuk met het keuzeonderwerp op ongeveer 500 uur. Er blijft dan tijd over om te werken aan hoofdstuk 16 Examentraining.

Bespreking van de hoofdstukken

In hoofdstuk 13 Limieten en asymptoten komen de asymptoten en het limietgedrag van functies aan de orde (subdomein B6). Ook scheve asymptoten en de begrippen linker- en rechterlimiet behoren tot de leerstof.
Met hoofdstuk 14 Meetkunde toepassen wordt domein E Meetkunde met coördinaten afgesloten. Nieuw zijn berekeningen bij zwaartepunten.
In hoofdstuk 15 Afgeleiden en primitieven komen nog enkele aspecten van domein C aan de orde. Dit hoofdstuk bevat naast herhaling ook nieuwe onderwerpen, zoals het verband tussen de verschillende soorten van stijgen en dalen en de eerste en tweede afgeleide, het rekenen aan formules van grafieken die elkaar raken of loodrecht snijden en het oplossen van optimaliseringsproblemen met behulp van de afgeleide.
In hoofdstuk 16 Examentraining is de leerstof onderverdeeld in vijf onderwerpen die elk in een paragraaf aan de orde komen. In de theorie wordt elk onderwerp kort en bondig herhaald. Daarna volgen passende examenopgaven uit de pilotexamens van 2012 tot en met 2015. In de zesde paragraaf van dit hoofdstuk zijn de complete pilotexamens van 2016 opgenomen.
Speciale aandacht verdienen ook de gemengde opgaven bij het hoofdstuk Examentraining. In een flink aantal korte opgaven, die kriskras door elkaar staan, komen alle basisvaardigheden die de leerling voor het examen nodig heeft aan de orde. Deze training wordt ook aangeboden in *Getal & Ruimte online*, waar de leerling bovendien de nodige feedback krijgt.

Het schoolexamen en het centraal examen

Het gehele examenprogramma vwo wiskunde B wordt centraal geëxamineerd, behalve de onderdelen die zich door hun aard niet lenen voor het schriftelijk examen, zoals het domein Keuzeonderwerpen.
Het schoolexamen dient betrekking te hebben op domein A (Vaardigheden) in combinatie met tenminste het subdomein E1 (Meetkundige vaardigheden) en het domein F (Keuzeonderwerpen).

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

Voorjaar 2017

Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit voorgaande hoofdstukken moet je paraat hebben.

O 2 **Oriënterende opgave**
Opgaven waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

T 3 [►►6] **Testopgave**
Een T-opgave volgt na een theorieblok. Als je de theorie en het voorbeeld goed begrijpt, dan kun je de testopgave maken. Gaat dit foutloos, dan mag je verder gaan met de opgave die achter ►► staat.

4 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R 5 **Reflecterende opgave**
In een reflectieopgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A 6 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

D 7 **Denkopgave**
Een D-opgave doet een extra beroep op je denkvermogen. De denkopgave hoort bij de behandelde theorie, maar vaak wordt in de opgave een probleem op een iets andere manier gepresenteerd.

[► WERKBLAD]
Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

Het percentage hoogopgeleiden is de laatste zeventig jaar voortdurend toegenomen. Het spreekt vanzelf dat deze toename niet onbeperkt kan doorgaan: er is een limiet aan het aandeel hoogopgeleiden in de beroepsbevolking. Bij het model dat deze ontwikkeling beschrijft, hoort een formule waarvan de grafiek een asymptoot heeft.

Wat leer je?

- Werken met formules bij de begrippen evenredig en omgekeerd evenredig.
- Het begrip inverse functie gebruiken bij eerstegraads gebroken functies.
- Het opstellen van vergelijkingen van verticale, horizontale en scheve asymptoten bij gebroken functies.
- De begrippen linker- en rechterlimiet.
- Werken met limieten bij exponentiële en logaritmische functies.

Limieten en asymptoten

13

Voorkennis Limieten

Theorie A De limiet als continumakende waarde

De functie f is continu in een open interval V als het bijbehorende deel van de grafiek van f een ononderbroken kromme is.

De functie $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x - 2}$ bestaat niet voor $x = 2$, want

$f(2) = \dfrac{3 \cdot 4 - 6 \cdot 2}{2 - 2} = \dfrac{0}{0}$.

Omdat $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x - 2} = \dfrac{3x(x - 2)}{x - 2} = 3x$ voor $x \neq 2$ is de grafiek van f de lijn $y = 3x$ met een *perforatie*. De coördinaten van deze perforatie zijn (2, 6). We noteren dit als volgt met een limiet:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 6x}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 3x = 3 \cdot 2 = 6.$$

> $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ betekent dat $f(x)$ onbeperkt tot b kan naderen door x maar dicht genoeg bij a te kiezen.

Bij de functie $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x - 2}$ is 6 de continumakende waarde van f voor $x = 2$. Notatie $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 6$.

De functie $g(x) = 3x$ is continu voor $x = 2$, want $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2)$.

Ook het omgekeerde geldt: als $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = g(2)$, dan is g continu in 2.

> Als de functie f continu is in a, dan geldt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
> Als voor de functie f geldt dat $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, dan is f continu in a.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$.

a Bereken $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b Bereken $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Uitwerking

a $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-4)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (x - 4) = -2$

b $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \dfrac{5^2 - 6 \cdot 5 + 8}{5 - 2} = \dfrac{3}{3} = 1$

1 Zie het voorbeeld met de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$.

a De grafiek van f heeft een perforatie.
Geef de coördinaten van deze perforatie.
b Licht toe dat f continu is in 5.
c Onderzoek of f continu is in 4.

2 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

b $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{x^2 - 10x + 24}{x - 6}$

c $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

d $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + x}$

Theorie B Limieten en eerstegraads gebroken functies

Bij de eerstegraads gebroken functie f is het functievoorschrift van de vorm $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ met $c \neq 0$ en $ad \neq bc$.
De grafiek van een eerstegraads gebroken functie is een hyperbool en heeft een verticale en een horizontale asymptoot.
De formule van de verticale asymptoot krijg je door de noemer gelijk aan nul te stellen.
De formule van de horizontale asymptoot krijg je door de limiet voor $x \to \infty$ te berekenen.

> $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ betekent dat $f(x)$ onbeperkt tot b kan naderen door x maar groot genoeg te nemen.

Bij het berekenen van $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x - 3}{2x + 4}$ maak je gebruik van de standaardlimiet $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x} = 0$.

standaardlimieten

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a}{x} = 0$

Je krijgt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x - 3}{2x + 4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - \dfrac{3}{x}}{2 + \dfrac{4}{x}} = \dfrac{5 - 0}{2 + 0} = 2\tfrac{1}{2}$.

Dus de horizontale asymptoot van de grafiek van $f(x) = \dfrac{5x - 3}{2x + 4}$ is de lijn $y = 2\tfrac{1}{2}$. Ook is $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2\tfrac{1}{2}$.

Het is bij een eerstegraads gebroken functie f niet nodig zowel $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ als $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ te berekenen om de formule van de horizontale asymptoot te vinden.

Bij de grafiek van de functie $g(x) = \dfrac{|5x - 3|}{2x + 4}$ heb je te maken met twee horizontale asymptoten.
Dit kun je als volgt inzien.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{5x - 3}{2x + 4} & \text{als } 5x - 3 \geq 0 \text{ ofwel } x \geq \frac{3}{5} \\ \dfrac{-5x + 3}{2x + 4} & \text{als } 5x - 3 < 0 \text{ ofwel } x < \frac{3}{5} \end{cases}$$

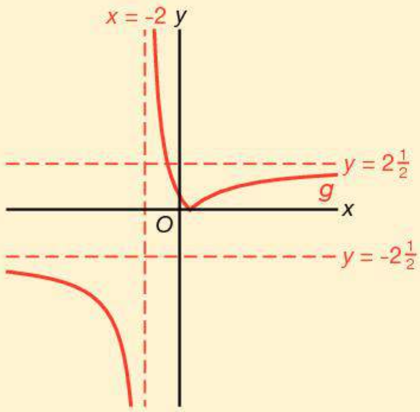
Daarom krijg je $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 2\tfrac{1}{2}$ en

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5x + 3}{2x + 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-5 + \dfrac{3}{x}}{2 + \dfrac{4}{x}} = \frac{-5 + 0}{2 + 0} = -2\tfrac{1}{2}.$$

Dus voor $x \to \infty$ nadert de grafiek van g de horizontale asymptoot $y = 2\tfrac{1}{2}$ en voor $x \to -\infty$ nadert de grafiek van g de horizontale asymptoot $y = -2\tfrac{1}{2}$.

De verticale asymptoot van de grafiek van g krijg je door $2x + 4$ gelijk aan 0 te stellen. Je krijgt de verticale asymptoot $x = -2$.

In figuur 13.1 zie je de grafiek van g.



figuur 13.1 $g(x) = \dfrac{|5x - 3|}{2x + 4}$

> Als $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ of als $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, dan is de lijn $y = b$ horizontale asymptoot van de grafiek van f.

Voorbeeld

Bereken.

a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{5-2x}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6-2x}{|3-2x|}$

Aanpak

b $|3-2x| = \begin{cases} 3-2x \text{ als } 3-2x \geq 0 \text{ ofwel } x \leq 1\frac{1}{2} \\ -(3-2x) \text{ als } x > 1\frac{1}{2} \end{cases}$

Dus $|3-2x| = -(3-2x)$ als $x \to \infty$.

Uitwerking

a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+4}{5-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2+\frac{4}{x}}{\frac{5}{x}-2} = \dfrac{2+0}{0-2} = -1$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6-2x}{|3-2x|} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6-2x}{-(3-2x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6-2x}{-3+2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{6}{x}-2}{-\frac{3}{x}+2} = \dfrac{0-2}{0+2} = -1$

3 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5-2x}{3x+1}$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x}{3-x}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|3-2x|}{x+1}$

d $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{|2x+1|}$

e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|x-1|+x}{|4-3x|+x}$

f $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|2x|-x+1}{|3-4x|}$

4 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5-3x}{|2x+5|}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.
b Schets de grafiek van f.

5 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4x-6}{2x-3}$.

a Waarom is de grafiek van f geen hyperbool?
b Teken de grafiek van f.

13.1 Evenredigheden en inverse functies

O 1 Gegeven zijn de formules $y_1 = 12x$ en $y_2 = \frac{12}{x}$.
Bij welke van deze formules geldt
a vermenigvuldig je x met een getal k, dan vermenigvuldig je y met k
b vermenigvuldig je x met een getal k, dan deel je y door k?

Theorie A Evenredig en omgekeerd evenredig

Bij de formule $y = 12x$ is y **recht evenredig** met x. Maak je x bijvoorbeeld drie keer zo groot, dan wordt y ook drie keer zo groot.
Bij de formule $y = \frac{12}{x}$ is y **omgekeerd evenredig** met x. Maak je x bijvoorbeeld drie keer zo groot, dan wordt y drie keer zo klein.

y* is recht evenredig met *x
- Vermenigvuldig je x met een getal, dan wordt y met hetzelfde getal vermenigvuldigd.
- De formule is van de vorm $y = ax$.
- De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.

y* is omgekeerd evenredig met *x
- Vermenigvuldig je x met een getal, dan wordt y door hetzelfde getal gedeeld.
- De formule is van de vorm $y = \frac{a}{x}$ ofwel $xy = a$.
- De grafiek is een hyperbool.

Het getal a in $y = ax$ en in $y = \frac{a}{x}$ heet de **evenredigheidsconstante**.

De grootheden P en Q zijn evenredig als er een getal a bestaat zo, dat $P = aQ$.
Zo volgt uit y is evenredig met $x\sqrt{x}$ dat $y = a \cdot x\sqrt{x}$.

De grootheden R en S zijn omgekeerd evenredig als er een getal a bestaat zo, dat $R = \frac{a}{S}$.
Zo volgt uit $\frac{x}{x-3}$ is omgekeerd evenredig met y^3 dat $\frac{x}{x-3} = \frac{a}{y^3}$.

Voorbeeld

Gegeven is dat y evenredig is met $\dfrac{2x-3}{2x+1}$.

Voor $x = 2$ is $y = 0{,}1$.

a Stel de formule op van y.

b Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} y$.

Uitwerking

a y evenredig met $\dfrac{2x-3}{2x+1}$, dus $y = a \cdot \dfrac{2x-3}{2x+1}$.

$x = 2$ en $y = 0{,}1$ geeft $a \cdot \dfrac{4-3}{4+1} = 0{,}1$

$0{,}2a = 0{,}1$

$a = 0{,}5$

Dus $y = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{2x-3}{2x+1}$ ofwel $y = \dfrac{2x-3}{4x+2}$.

b $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x-3}{4x+2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 - \dfrac{3}{x}}{4 + \dfrac{2}{x}} = \dfrac{2-0}{4+0} = \frac{1}{2}$

2 Gegeven is dat y evenredig is met $\dfrac{x}{4x+1}$.

Voor $x = 1$ is $y = 0{,}6$.

a Stel de formule op van y.

b Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} y$.

3 Gegeven is dat $\dfrac{2x}{x-1}$ omgekeerd evenredig is met y.

Voor $x = 5$ is $y = 1{,}6$.

a Stel de formule op van y.

b Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} y$.

A 4 Gegeven is dat y omgekeerd evenredig is met $2 + \dfrac{4}{|x|}$.

Voor $x = -2$ is $y = 1$.

Bereken $\lim\limits_{x \to -\infty} y$.

13

5 Bekend is dat de geluidssterkte L omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand d tot de geluidsbron. Hierin is L in een geschikte eenheid en d in meter.
Van een stereo-installatie is op een afstand van 4 meter de geluidssterkte 50.

a Stel de formule van L op.
b Wat is de geluidssterkte op een afstand van 2 meter?
c Op welke afstand is de geluidssterkte 20?
d Daniëlle krijgt last van haar oren en gaat twee keer zo ver van de luidsprekers zitten.
Welke invloed heeft dat op de geluidssterkte die zij waarneemt?

A 6 Een vliegtuig ondervindt twee soorten weerstand.

- De luchtweerstand W_l die evenredig is met het kwadraat van de snelheid v.
- De inductieweerstand W_i die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de snelheid v.

Een Boeing 747 ondervindt bij een snelheid van 720 km/uur een luchtweerstand van 120 000 N en een inductieweerstand van 300 000 N.

a Stel de formule op van W_l en W_i. Neem de weerstand in newton en de snelheid v in km/uur.

De totale weerstand is $W = W_l + W_i$.

b Bereken bij welke snelheid in km/uur de totale weerstand minimaal is.
c Onderzoek of bij minimale totale weerstand geldt $W_l = W_i$.

De Boeing 747 (Jumbo Jet) is een viermotorig vliegtuig van de Amerikaanse fabrikant Boeing. Het is een van de meest herkenbare vliegtuigen en tevens de eerste widebody. Er zijn sinds 1970 meer dan 1500 van geproduceerd en in 2016 zijn er door de US Air Force nog twee besteld voor het vervoer van de president van de VS.

O 7 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x+5}{3-x}$. De grafiek van f snijdt de assen in de punten $\left(-2\frac{1}{2}, 0\right)$ en $\left(0, 1\frac{2}{3}\right)$.
De functie f heeft een inverse functie f^{inv}.

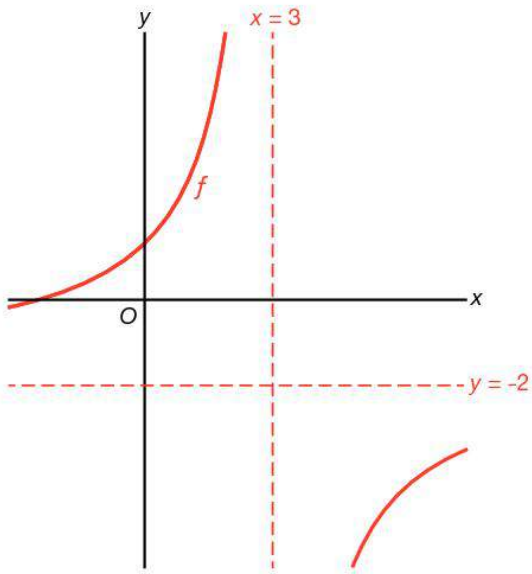
a Licht toe dat f een inverse heeft.

b De grafiek van f^{inv} heeft een verticale en een horizontale asymptoot.
Geef van deze lijnen de formule.

c De grafiek van f^{inv} snijdt de x-as in het punt A en de y-as in het punt B.
Geef de coördinaten van deze punten.

d Schets de grafiek van f^{inv}.

e Sanne zegt: 'Omdat de grafiek van f de lijn $y = x$ niet snijdt, zullen de grafieken van f en f^{inv} elkaar ook niet snijden.'
Ben jij het met Sanne eens? Licht toe.



figuur 13.2 $f(x) = \dfrac{2x+5}{3-x}$

Theorie B Inverse van eerstegraads gebroken functie

Je hebt met een functie van x naar y te maken als bij elke waarde van x hoogstens één waarde van y hoort. Hieruit volgt dat een functie f een inverse functie f^{inv} heeft als bij f bovendien geldt dat bij elke waarde van y hoogstens één waarde van x hoort. Dit is het geval bij elke eerstegraads gebroken functie.
Zoals je weet zijn de grafieken van f en f^{inv} elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$. Hieruit volgt dat als de grafieken van f en f^{inv} elkaar snijden, dat de snijpunten op de lijn $y = x$ liggen.
Je krijgt het functievoorschrift van f^{inv} door bij het functievoorschrift van f de variabelen x en y te verwisselen en y vrij te maken.
Bij de functie $f(x) = \dfrac{2x+5}{3-x}$ krijg je het functievoorschrift van f^{inv} als volgt.
Bij f hoort $y = \dfrac{2x+5}{3-x}$, dus bij f^{inv} hoort $x = \dfrac{2y+5}{3-y}$.
Vrijmaken van y geeft
$x(3-y) = 2y+5$
$3x - xy = 2y + 5$
$-xy - 2y = -3x + 5$
$xy + 2y = 3x - 5$
$y(x+2) = 3x - 5$
$y = \dfrac{3x-5}{x+2}$
Dus $f^{\text{inv}}(x) = \dfrac{3x-5}{x+2}$.

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x+2}$ en $g(x) = \dfrac{2x-2}{3-x}$.

Er geldt dat g de inverse is van f.

a Toon dit aan.

b De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B.
Bereken exact de coördinaten van A en B.

Aanpak

b Bedenk dat de grafieken van f en g elkaar snijden op de lijn $y = x$.

Uitwerking

a Voor f geldt $y = 3 - \dfrac{4}{x+2}$, dus voor f^{inv} geldt $x = 3 - \dfrac{4}{y+2}$.

$x = 3 - \dfrac{4}{y+2}$ geeft $\dfrac{4}{y+2} = 3 - x$

$$(y+2)(3-x) = 4$$
$$3y - xy + 6 - 2x = 4$$
$$3y - xy = 2x - 2$$
$$y(3-x) = 2x - 2$$
$$y = \frac{2x-2}{3-x}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \dfrac{2x-2}{3-x}$ en er geldt inderdaad dat $g(x) = f^{\text{inv}}(x)$.

b Los op $3 - \dfrac{4}{x+2} = x$

$$3 - x = \frac{4}{x+2}$$
$$(3-x)(x+2) = 4$$
$$3x + 6 - x^2 - 2x = 4$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x+1)(x-2) = 0$$
$$x = -1 \vee x = 2$$

Dus $A(-1, -1)$ en $B(2, 2)$.

R 8 Zie het voorbeeld.

a Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek van f.
Hoe volgen hieruit de formules van de asymptoten van de grafiek van g?

b In het voorbeeld zijn de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g berekend door de vergelijking $f(x) = x$ op te lossen. De vergelijkingen $f(x) = g(x)$ en $g(x) = x$ hadden ook gebruikt kunnen worden.
Welke heeft je voorkeur?

9 Stel het functievoorschrift op van de inverse van de volgende eerstegraads gebroken functies.

a $f(x) = \dfrac{2x}{x+3}$

b $f(x) = \dfrac{3x-1}{4x+5}$

c $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

10 Gegeven is de functie $f(x) = 3 - \dfrac{3}{x+1}$.

a Stel de formules op van de asymptoten van de grafiek van f.

b De lijn k raakt de grafiek van f in het punt $A\left(1, 1\frac{1}{2}\right)$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van k.

De grafieken van f en f^{inv} snijden elkaar in de oorsprong en in het punt B. De lijn l raakt de grafiek van f^{inv} in B.

c Stel langs algebraïsche weg de formule op van l.

D 11 Zie opgave 10.
Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafieken van f en f^{inv}.

De primitieven van $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$ zijn $F(x) = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + c$.

A 12 Voor elke $a \neq \frac{4}{5}$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{ax-2}{2x-5}$.
Bereken algebraïsch voor welke a

a de lijn $y = 3$ horizontale asymptoot is van de grafiek van f

b de lijn $x = 4$ verticale asymptoot is van de grafiek van f^{inv}

c de functie $g(x) = 2\frac{1}{2} + \dfrac{4}{x-2}$ de inverse is van f

d de grafieken van f en f^{inv} geen gemeenschappelijke punten hebben.

D 13 Voor elke a en b, met $a \neq b$, is gegeven de functie
$f(x) = \dfrac{ax+b}{x+1}$.
Bereken voor welke a en b de grafieken van f en f^{inv} elkaar snijden in de punten A en B met $x_A = 3$ en $x_B = 5$.

Terugblik

Evenredig en omgekeerd evenredig

De grootheden A en B zijn evenredig als er een getal a bestaat zo, dat $A = aB$.
Hierin is a de evenredigheidsconstante.

Is gegeven dat $2y - 3$ evenredig is met $\frac{x}{x+2}$ dan geldt dus dat $2y - 3 = a \cdot \frac{x}{x+2}$.
Is bovendien gegeven dat bij $x = 1$ hoort $y = 2$, dan is de evenredigheidsconstante te berekenen.
Je krijgt $2 \cdot 2 - 3 = a \cdot \frac{1}{3}$, dus $\frac{1}{3}a = 1$ ofwel $a = 3$.

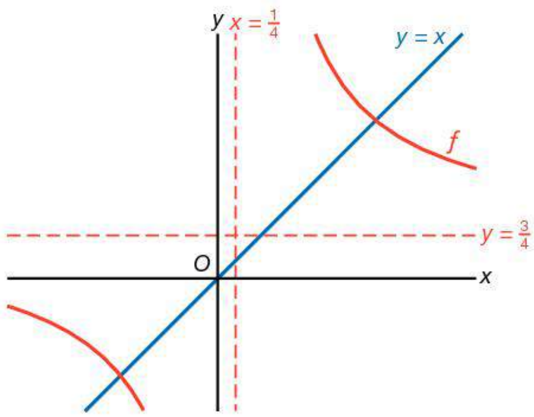
De grootheden A en B zijn omgekeerd evenredig als er een getal a bestaat zo, dat $A = \frac{a}{B}$.

Is gegeven dat p^3 omgekeerd evenredig is met q^2 dan geldt dus dat $p^3 = \frac{a}{q^2}$ ofwel $a = p^3 \cdot q^2$.

Is bovendien gegeven dat bij $p = 3$ hoort $q = 5$, dan is $a = 3^3 \cdot 5^2 = 675$ en dus $p^3 = \frac{675}{q^2}$.

Inverse van een eerstegraads gebroken functie

Om het functievoorschrift van de inverse functie van $f(x) = \frac{3x+15}{4x-1}$ op te stellen, verwissel je x en y in $y = \frac{3x+15}{4x-1}$ en maak je y vrij.



Je krijgt $x = \frac{3y+15}{4y-1}$

$$x(4y-1) = 3y + 15$$
$$4xy - x = 3y + 15$$
$$4xy - 3y = x + 15$$
$$y(4x-3) = x + 15$$
$$y = \frac{x+15}{4x-3}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \frac{x+15}{4x-3}$.

De grafieken van f en f^{inv} zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$. De coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en f^{inv} kun je daarom vinden door de vergelijking $f(x) = x$ of de vergelijking $f^{\text{inv}}(x) = x$ op te lossen.

$f(x) = x$ geeft $\frac{3x+15}{4x-1} = x$

$$4x^2 - x = 3x + 15$$
$$4x^2 - 4x - 15 = 0$$
$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot -15 = 256$$
$$x = \frac{4-16}{8} = -1\tfrac{1}{2} \vee x = \frac{4+16}{8} = 2\tfrac{1}{2}$$

Dus de snijpunten zijn $\left(-1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right)$ en $\left(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$.

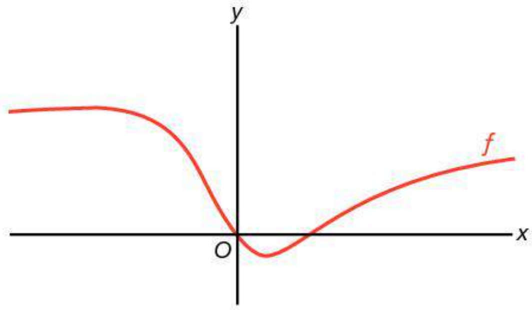
13.2 Asymptoten bij gebroken functies

O 14 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 + 4}$.

In figuur 13.3 zie je de grafiek van f. Zo te zien heeft de grafiek een horizontale asymptoot.

a Bereken $f(10)$, $f(100)$ en $f(1000)$ in drie decimalen nauwkeurig.
Wat denk je dat de uitkomst is van $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?

b Bereken $f(-10)$, $f(-100)$ en $f(-1000)$ in drie decimalen nauwkeurig.
Wat denk je dat de uitkomst is van $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?



figuur 13.3

Theorie A Verticale en horizontale asymptoten

Om de formule van de horizontale asymptoot van de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 + 4}$ te vinden, berekenen we $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Daartoe delen we teller en noemer door de hoogste macht van x in de noemer en gebruiken we dat

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$ voor $n > 0$.

> standaardlimieten
>
> $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$ voor $n > 0$
>
> $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$ voor $n > 0$

Dit geeft $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 + 4} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3 - \frac{6}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \dfrac{3 - 0}{1 + 0} = 3$ en

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - 6x}{x^2 + 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3 - \frac{6}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3.$$

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.

Dat de horizontale asymptoot de lijn $y = 3$ is wil niet zeggen dat $f(x)$ niet gelijk aan 3 kan worden.

Immers $f(x) = 3$ geeft $\dfrac{3x^2 - 6x}{x^2 + 4} = 3$

$$3x^2 - 6x = 3(x^2 + 4)$$
$$3x^2 - 6x = 3x^2 + 12$$
$$-6x = 12$$
$$x = -2$$

$f(-2) = 3$, dus het punt $(-2, 3)$ ligt op de grafiek van f.

Om formules van verticale asymptoten bij gebroken functies te vinden, los je de vergelijking noemer $= 0 \wedge$ teller $\neq 0$ op.

Voorbeeld

Stel de formule op van elke asymptoot van de grafiek van $f(x) = \dfrac{|2x^3 - 1|}{x^3 - 1}$.

Aanpak

Bij het berekenen van de formules van horizontale asymptoten gebruik je

$$|2x^3 - 1| = \begin{cases} 2x^3 - 1 \text{ als } 2x^3 - 1 \geq 0 \text{ ofwel } x \geq \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \\ -(2x^3 - 1) \text{ als } x < \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \end{cases}$$

Dus $|2x^3 - 1| = 2x^3 - 1$ als $x \to \infty$

en $|2x^3 - 1| = -(2x^3 - 1) = -2x^3 + 1$ als $x \to -\infty$.

Uitwerking

verticale asymptoot: $x^3 - 1 = 0 \wedge |2x^3 - 1| \neq 0$

$$x^3 = 1 \wedge x^3 \neq \tfrac{1}{2}$$

$$x = 1 \wedge x \neq \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = 1$.

horizontale asymptoten:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{|2x^3 - 1|}{x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$

Voor $x \to \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 2$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{|2x^3 - 1|}{x^3 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2x^3 + 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}} = \frac{-2 + 0}{1 - 0} = -2$$

Voor $x \to -\infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = -2$.

De grafiek van de functie $g(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 - 1}$ heeft geen horizontale asymptoot.

Je kunt nagaan dat geldt

- als $x \to \infty$ dan $g(x) \to \infty$
- als $x \to -\infty$ dan $g(x) \to -\infty$.

Men noteert ook wel $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

R 15 In de theorie staat dat voor het berekenen van $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ of $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ bij een gebroken functie f je teller en noemer deelt door de hoogste macht van x in de noemer.
Ga na wat je krijgt als je bij de functie $g(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 - 1}$ teller en noemer deelt door de hoogste macht van x in de teller.

16 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x}{2 - x^2}$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 - x^3}{2x^3}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2}{2 - x^3}$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 3)^2}{x^2 + 1}$

17 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(4x - 1)^2}{x^3 + 4}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x(2x + 1)^2}{x^3 + 1}$

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x^3 - 8|}{2x^3 + x}$

d $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|4x^3| - 10}{|x^3 - 1|}$

18 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2 - x - 6}$.

a Stel de formule op van elke asymptoot van de grafiek van f.
b De horizontale asymptoot van de grafiek van f snijdt de grafiek in het punt A.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A.
c Los de ongelijkheid $f(x) < 4\frac{1}{2}$ exact op.

19 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{|x^3|}{x^3 - 4x}$.

a Stel de formule op van elke asymptoot van de grafiek van f.
b De horizontale asymptoten snijden de grafiek van f in de punten A en B.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k door A en B.
c Los exact op $f(x) > 1\frac{1}{3}$.

A 20 **a** De grafiek van $f(x) = \dfrac{ax^2 + 5}{bx^2 - 18}$ heeft de asymptoten $x = -3$, $x = 3$ en $y = 6$.
Bereken a en b.

b De grafiek van $g(x) = \dfrac{5x^3 - 2x^2 + 1}{ax^4 + bx^3 - 2}$ heeft de asymptoten $x = -2$, $x = 2$ en $y = 0$.
Bereken a en b.

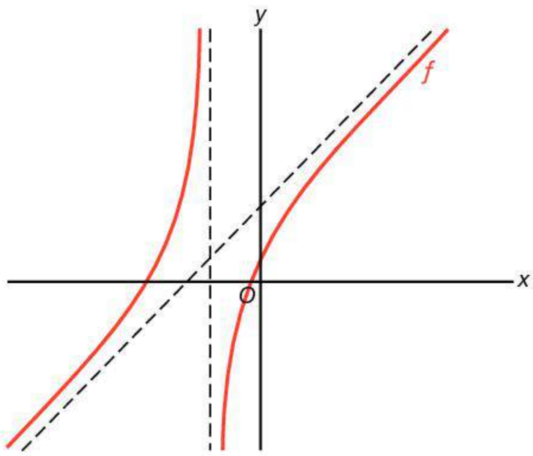
O 21 Gegeven is de functie $f(x) = x + 3 - \dfrac{4}{x+2}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.

a Licht toe dat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$.

Wat volgt hieruit voor de grafiek van f?

b Toon aan dat het functievoorschrift van f te schrijven is als $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 2}{x + 2}$.



figuur 13.4

Theorie B Scheve asymptoten

De grafiek van $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4}$ heeft een **scheve asymptoot**. Dit kun je aantonen door het functievoorschrift te schrijven als

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x + 4}$ en vervolgens te laten zien dat

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{2x + 4} = 0$.

Het omschrijven van $\dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4}$ tot $\frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x + 4}$ doe je door uit te delen.

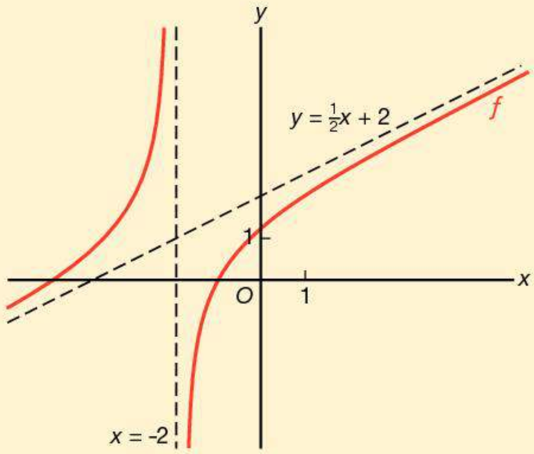
$$\frac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4} = \frac{\frac{1}{2}x(2x + 4) - 2x + 6x + 5}{2x + 4} = \frac{1}{2}x + \frac{4x + 5}{2x + 4}$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{2(2x + 4) - 8 + 5}{2x + 4} = \frac{1}{2}x + 2 - \frac{3}{2x + 4}$$

Dus $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4} = \frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x + 4}$.

Omdat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{2x + 4} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{2x + 4} = 0$ nadert de grafiek van f tot de lijn $y = \frac{1}{2}x + 2$. Dat wil zeggen dat de grafiek van f **asymptotisch nadert** tot de lijn $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Daarom is deze lijn de scheve asymptoot van de grafiek.



figuur 13.5

Een gebroken functie f waarvan het functievoorschrift is te schrijven in de vorm $f(x) = ax + b + \dfrac{t(x)}{n(x)}$ en waarbij $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{t(x)}{n(x)} = 0$ heeft een grafiek waarvan de scheve asymptoot de lijn $y = ax + b$ is.

De grafiek van een gebroken functie f heeft de scheve asymptoot $y = ax + b$ als het functievoorschrift van f te schrijven is in de vorm $f(x) = ax + b + \dfrac{t(x)}{n(x)}$ en waarbij geldt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{t(x)}{n(x)} = 0$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4}$.

Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

Uitwerking

verticale asymptoten:

$x^2 - 4 = 0 \wedge x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$x^2 = 4 \wedge x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$(x = 2 \vee x = -2) \wedge x^3 + 2x^2 - 4x - 5 \neq 0$

$x = 2 \vee x = -2$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

> Voor $x = 2$ is
> $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 3 \neq 0$.
>
> Voor $x = -2$ is
> $x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 3 \neq 0$.

scheve asymptoot:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4} = \frac{x(x^2 - 4) + 4x + 2x^2 - 4x - 5}{x^2 - 4} = x + \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4}$$

$$= x + \frac{2(x^2 - 4) + 8 - 5}{x^2 - 4} = x + 2 + \frac{3}{x^2 - 4}$$

Dus $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x^2 - 4}$.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{x^2 - 4} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x^2 - 4} = 0$

Dus de scheve asymptoot is de lijn $y = x + 2$.

22 Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

a $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - 5}{x - 1}$

b $g(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{2x - 1}$

c $h(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x + 31}{x^2 - 9}$

d $j(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

Informatief Staartdelen in plaats van uitdelen

Je kunt de formule $y = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x + 4}$ ook schrijven als $y = \frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x + 4}$ met een staartdeling.

Dit gaat als volgt.

$\boxed{\dfrac{x^2}{2x} = \frac{1}{2}x}$

$2x + 4 \,/\, x^2 + 6x + 5 \,\backslash\, \frac{1}{2}x + 2$

$\boxed{\frac{1}{2}x(2x + 4)} \rightarrow \underline{x^2 + 2x}\ -$

$4x + 5$

$\boxed{\dfrac{4x}{2x} = 2}$

$\boxed{2(2x + 4)} \rightarrow \underline{4x + 8}\ -$

-3

Dus $y = \frac{1}{2}x + 2 - \dfrac{3}{2x + 4}$.

23 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 2}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.
b Bereken exact de extreme waarden van f.
c Los exact op $f(x) \leq 0$.

A 24 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{|x|}$.

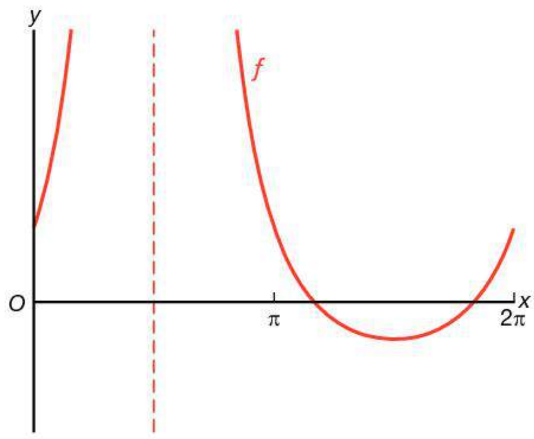
a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.
b Bereken exact de extreme waarden van f.
c Los exact op $f(x) \leq 6$.

O 25 Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie

$f(x) = \dfrac{1 + 2\sin(x)}{1 - \sin(x)}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.
De grafiek van f heeft een verticale asymptoot.

a Stel van deze asymptoot de formule op.
b Bereken exact de nulpunten van f.



figuur 13.6

Theorie C Asymptoten bij gebroken goniometrische functies

Bij het berekenen van de nulpunten en de formule van de verticale asymptoot in opgave 25 los je goniometrische vergelijkingen op.

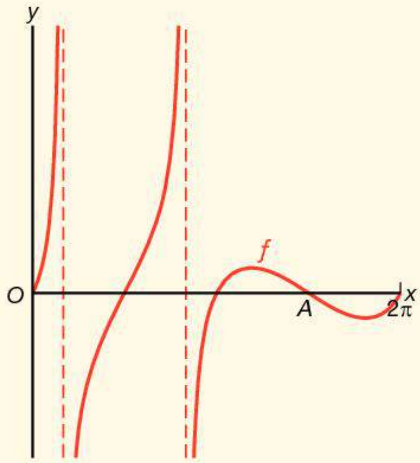
Het oplossen van goniometrische vergelijkingen

- $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$
  los je op met de eenheidscirkel.
- $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$
  los je op door uit de exacte-waarde-cirkel één oplossing B af te lezen. Daarna gebruik je
  $\sin(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
  $\cos(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.
- $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$
  los je op door te gebruiken
  $\sin(A) = \sin(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
  $\cos(A) = \cos(B)$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.

Voorbeeld

Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{1 - 2\sin(x)}$.

In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.
Het punt A is een van de snijpunten van de grafiek met de x-as. De lijn k raakt de grafiek in A en snijdt de asymptoten in de punten B en C.
Bereken exact de coördinaten van B en C.



figuur 13.7

Uitwerking
verticale asymptoten:
$1 - 2\sin(x) = 0 \wedge \sin(2x) \neq 0$
$\sin(x) = \frac{1}{2} \wedge 2x \neq k \cdot \pi$
$\left(x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi\right) \wedge x \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$

De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$.

$\sin(2x) = 0$ geeft $x = k \cdot \frac{1}{2}\pi$, dus $A\left(1\frac{1}{2}\pi, 0\right)$.

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{1 - 2\sin(x)} \text{ geeft } f'(x) = \frac{(1 - 2\sin(x)) \cdot 2\cos(2x) - \sin(2x) \cdot -2\cos(x)}{(1 - 2\sin(x))^2}$$
$$= \frac{2\cos(2x) - 4\sin(x)\cos(2x) + 2\sin(2x)\cos(x)}{(1 - 2\sin(x))^2}$$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = \dfrac{2 \cdot -1 - 4 \cdot -1 \cdot -1 + 2 \cdot 0 \cdot 0}{(1 - 2 \cdot -1)^2} = \dfrac{-2 - 4}{3^2} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$.

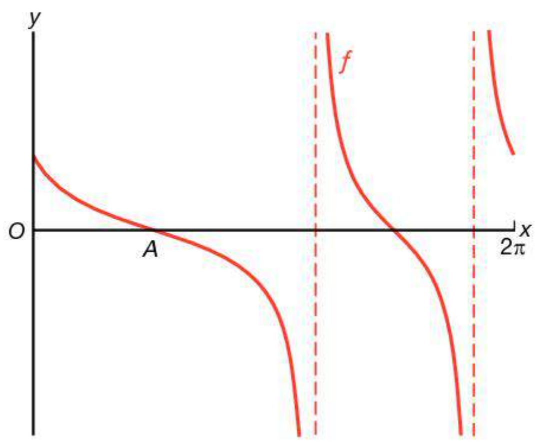
$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + b \\ A\left(1\frac{1}{2}\pi, 0\right) \end{array}\right\} -\frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}\pi + b = 0, \text{ dus } b = \pi$$

Dus k: $y = -\frac{2}{3}x + \pi$.

$x = \frac{1}{6}\pi$ geeft $y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}\pi + \pi = \frac{8}{9}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$ geeft $y = -\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}\pi + \pi = \frac{4}{9}\pi$.

Dus $B\left(\frac{1}{6}\pi, \frac{8}{9}\pi\right)$ en $C\left(\frac{5}{6}\pi, \frac{4}{9}\pi\right)$.

26 Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sin(x) + 1}$. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.
Het punt A is een van de snijpunten van de grafiek met de x-as. De lijn k raakt de grafiek in A en snijdt de asymptoten in de punten B en C.
Bereken exact de coördinaten van B en C.



figuur 13.8

13

27 Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{1}{2\cos(x) - 1}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de asymptoten van de grafiek van f, de lijn $y = x$ en de x-as.

a Bereken exact de oppervlakte van V.

b Bereken exact voor welke waarde van a de vergelijking $f(x) = a$ geen oplossing heeft.

28 Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{\cos^2(x)}{\cos(x) + 1}$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b De lijn $y = \frac{1}{2}$ raakt de grafiek van f in twee toppen en snijdt de grafiek in de punten A en B.
Bereken exact de afstand van de punten A en B tot de verticale asymptoot van de grafiek.

A 29 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{\cos(ax)}{\sqrt{3} - 2\sin(ax)}$ met $0 < a < 1$.

a Bereken exact voor welke a de lijn $x = \pi$ een verticale asymptoot is van de grafiek van f_a.

b Neem $a = \frac{1}{2}$ en $0 \leq x \leq 2\pi$.
De grafiek van $f_{\frac{1}{2}}$ snijdt de y-as in het punt A.
De lijn k raakt de grafiek van $f_{\frac{1}{2}}$ in A en snijdt de verticale asymptoten van de grafiek in de punten B en C.
Bereken exact het verschil van de y-coördinaten van B en C.

Terugblik

Limieten bij gebroken vormen

Om $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 8}{4 - x^2}$ te berekenen deel je de teller en de noemer door de hoogste macht van x in de noemer. Verder gebruik je dat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{x^n} = 0$ voor $n > 0$.

Je krijgt $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - 8}{4 - x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4 - \frac{8}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - 1} = \dfrac{4 - 0}{0 - 1} = -4$.

Je weet nu dat de horizontale asymptoot van de grafiek van de functie

$f(x) = \dfrac{4x^2 - 8}{4 - x^2}$ de lijn $y = -4$ is. Ook is $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 8}{4 - x^2} = -4$.

De verticale asymptoten van de grafiek van f krijg je door de noemer gelijk aan nul te stellen.
Dus $4 - x^2 = 0$ en dit geeft $x = 2 \vee x = -2$. Omdat voor $x = 2$ en voor $x = -2$ de teller niet nul is, zijn de verticale asymptoten de lijnen $x = 2$ en $x = -2$.

Scheve asymptoten

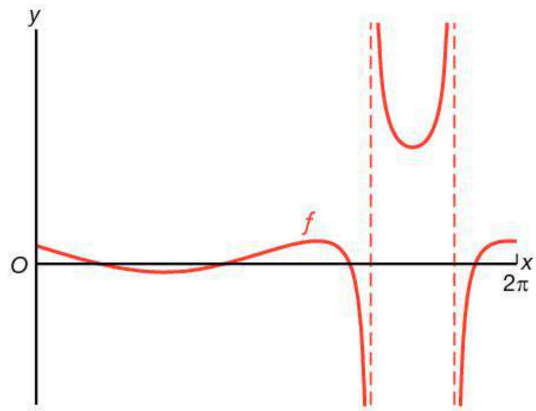
Bij de gebroken functie $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 8}{4 - x^2}$ is de graad van de teller één hoger dan de graad van de noemer. Het functievoorschrift van f is met behulp van uitdelen te schrijven als $f(x) = -2x + 1 + \dfrac{8x + 4}{4 - x^2}$.

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 8}{4 - x^2} = \frac{-2x(4 - x^2) + 8x - x^2 + 8}{4 - x^2} = -2x + \frac{4 - x^2 + 8x + 4}{4 - x^2} = -2x + 1 + \frac{8x + 4}{4 - x^2}$$

Omdat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x + 4}{4 - x^2} = 0$ is de lijn $y = -2x + 1$ scheve asymptoot. Omdat ook $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{8x + 4}{4 - x^2} = 0$ nadert de grafiek van f onbeperkt dicht tot de lijn $y = -2x + 1$ voor $x \to \infty$ en voor $x \to -\infty$.

Asymptoten bij gebroken goniometrische functies

De grafiek van $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\sqrt{3} + 2\sin(x)}$ heeft op $[0, 2\pi]$ twee verticale asymptoten.
Om de formules van deze asymptoten te berekenen los je op $\sqrt{3} + 2\sin(x) = 0 \wedge \cos(2x) \neq 0$.
Dit geeft $x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1\frac{1}{3}\pi$ en $x = 1\frac{2}{3}\pi$.



13.3 Limieten en perforaties

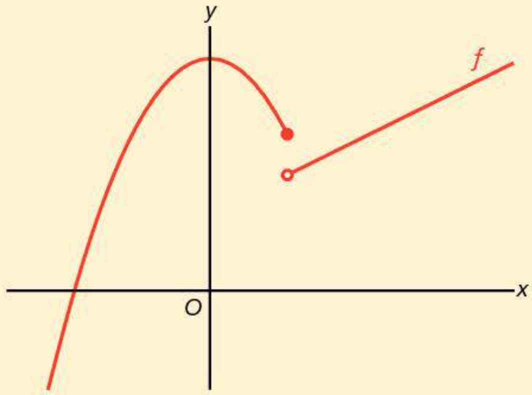
O 30 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \begin{cases} x^2 \text{ voor } x \leq 1 \\ -x + p \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

a Teken de grafiek van f_3.
b Is de grafiek van f_3 een ononderbroken kromme?
c Voor welke waarde van p is de grafiek van f_p een ononderbroken kromme?

Theorie A Linker- en rechterlimiet

In de figuur hiernaast is de grafiek van de functie

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 \text{ voor } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + 1 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$ getekend.



figuur 13.9

De twee gedeelten van de grafiek sluiten niet op elkaar aan. Om dit aan te tonen gebruiken we de begrippen **linkerlimiet** en **rechterlimiet**.
De linkerlimiet is
$\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 1} (-x^2 + 3) = -1^2 + 3 = 2.$

De rechterlimiet is $\lim\limits_{x \downarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow 1} \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 1\frac{1}{2}.$

Merk op dat in dit geval de linkerlimiet gelijk is aan de functiewaarde bij $x = 1$.

> $x \uparrow 1$ spreek je uit als x stijgt naar 1.
>
> $x \downarrow 1$ spreek je uit als x daalt naar 1.

Bij de functie $g_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 \text{ voor } x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + p \text{ voor } x > 2 \end{cases}$

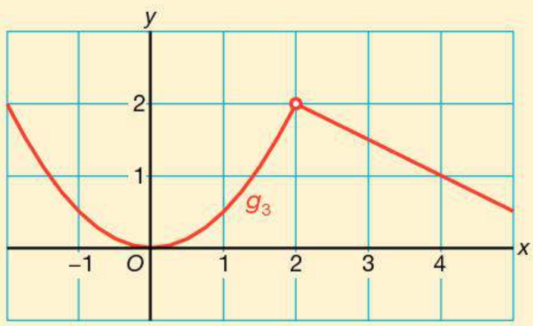
is de linkerlimiet $\lim\limits_{x \uparrow 2} g_p(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2} \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$

en de rechterlimiet $\lim\limits_{x \downarrow 2} g_p(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2} \left(-\frac{1}{2}x + p\right) = -\frac{1}{2} \cdot 2 + p = p - 1.$

Voor $p = 3$ is $\lim\limits_{x \uparrow 2} g_p(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2} g_p(x)$, want $p - 1 = 2$ geeft $p = 3$.

We zeggen dat $\lim\limits_{x \to 2} g_p(x)$ bestaat voor $p = 3$.

In de figuur hiernaast is de grafiek van g_3 getekend.
Merk op dat $g_3(2)$ niet bestaat.



figuur 13.10

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat als $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$.

Voorbeeld

Voor $0 < p < 1$ zijn gegeven de functies $f_p(x) = \begin{cases} \sin(p\pi x) \text{ voor } x < 2 \\ \frac{1}{8}x^2 \text{ voor } x > 2 \end{cases}$

Voor welke p bestaat $\lim\limits_{x \to 2} f_p(x)$? Geef een exact antwoord.

Uitwerking

$\lim\limits_{x \uparrow 2} f_p(x) = \lim\limits_{x \uparrow 2} \sin(p\pi x) = \sin(2p\pi)$

$\lim\limits_{x \downarrow 2} f_p(x) = \lim\limits_{x \downarrow 2} \frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8} \cdot 2^2 = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to 2} f_p(x)$ bestaat als $\sin(2p\pi) = \frac{1}{2}$

$$2p\pi = \tfrac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2p\pi = \tfrac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$p = \tfrac{1}{12} + k \cdot 1 \vee p = \tfrac{5}{12} + k \cdot 1$$

$0 < p < 1$ geeft $p = \frac{1}{12} \vee p = \frac{5}{12}$

31 Voor welke p bestaat $\lim\limits_{x \to 1} f_p(x)$? Geef exacte antwoorden.

a $f_p(x) = \begin{cases} 2^{x-p} \text{ voor } x < 1 \\ x^2 + 7 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

b $f_p(x) = \begin{cases} e^{x+p} \text{ voor } x < 1 \\ x + 3 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

c $f_p(x) = \begin{cases} \ln(x+p) \text{ voor } x < 1 \\ x^2 + 1 \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

d $f_p(x) = \begin{cases} |px - 2| \text{ voor } x < 1 \\ x^2 + 3x \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

Informatief Continuïteit

De functie $y = f(x)$ is continu in a als $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Voor continuïteit in a moet dus $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaan en gelijk zijn aan de functiewaarde bij a. Dat $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ moet bestaan betekent dat moet gelden dat $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$.

Bij de functies $f_p(x) = \begin{cases} x^2 \text{ voor } x \leq 1 \\ -x + p \text{ voor } x > 1 \end{cases}$ van opgave 30 is $\lim\limits_{x \uparrow 1} f_p(x) = f_p(1)$.

Voor continuïteit moet dus nog gelden dat $\lim\limits_{x \downarrow 1} f_p(x) = f_p(1)$.

Dit geeft $-1 + p = 1$ ofwel $p = 2$.

Dus voor $p = 2$ is de grafiek van f_p een ononderbroken kromme.

32 Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \begin{cases} x^2 + p \text{ voor } x < 2 \\ 3x + q \text{ voor } 2 < x < 4 \\ -x^2 - px + 11 \text{ voor } x > 4 \end{cases}$

Voor welke p en q bestaan $\lim\limits_{x \to 2} f_{p,q}(x)$ en $\lim\limits_{x \to 4} f_{p,q}(x)$?

A 33 Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \begin{cases} 4\sin(p\pi x) \text{ voor } x < \frac{1}{4} \\ 8x^2 + qx + 2 \text{ voor } \frac{1}{4} < x < 3 \\ x^4 - 4x - 1 \text{ voor } x > 3 \end{cases}$

Voor welke p met $0 < p < 5$ en q bestaan $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} f_{p,q}(x)$ en $\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$?

D 34 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = \begin{cases} x^2 + 2p \text{ voor } x < 1 \\ |2x - p^2| \text{ voor } x > 1 \end{cases}$

Voor welke p bestaat $\lim\limits_{x \to 1} f_p(x)$? Geef een exact antwoord.

O 35 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x}{x - 4}$.
De grafiek van f heeft een perforatie.
Bereken de coördinaten van deze perforatie.

Theorie B Perforaties

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 2x - 15}$ heeft een perforatie.

Dit kun je inzien door de teller en de noemer te ontbinden.

Je krijgt $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-5)}{(x+3)(x-5)}$.

Omdat van zowel de teller als de noemer $(x - 5)$ een factor is,
krijg je $f(5) = \dfrac{0}{0}$.

Om de coördinaten van de perforatie te vinden bereken je $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Je krijgt $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-3)(x-5)}{(x+3)(x-5)} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{5-3}{5+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

De grafiek van f is de hyperbool $y = \dfrac{x-3}{x+3}$ met perforatie $\left(5, \frac{1}{4}\right)$.

Ook de grafiek van de functie $g(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{2x - 3}$ heeft een perforatie.

Het nulpunt van de noemer is $1\frac{1}{2}$ en

$$g\left(1\tfrac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - 1\frac{1}{2} - 3}{0} = \frac{4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} - 3}{0} = \frac{0}{0}.$$

Omdat ook de teller nul wordt voor $x = 1\frac{1}{2}$ is de teller te ontbinden, waarbij één van de factoren $(2x - 3)$ is.
Je krijgt $2x^2 - x - 3 = (2x - 3)(x + 1)$.
Als je deze ontbinding niet ziet, kun je als volgt te werk gaan.
Schrijf de noemer als $2\left(x - 1\frac{1}{2}\right)$ en de teller als $2\left(x^2 - \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}\right)$.
Nu is de teller te ontbinden met de product-som-methode.
Je krijgt $2(x + 1)\left(x - 1\frac{1}{2}\right)$.

Merk op dat je al weet dat één van de factoren $\left(x - 1\frac{1}{2}\right)$ is.

Dus $g(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{2x - 3} = \dfrac{2(x + 1)\left(x - 1\frac{1}{2}\right)}{2\left(x - 1\frac{1}{2}\right)}$ en de x-coördinaat van de perforatie is $1\frac{1}{2}$. De y-coördinaat van de perforatie vind je door $\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} g(x)$ te berekenen.

Je krijgt $\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} \dfrac{2(x + 1)\left(x - 1\frac{1}{2}\right)}{2\left(x - 1\frac{1}{2}\right)} = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} (x + 1) = 1\frac{1}{2} + 1 = 2\frac{1}{2}$.

De grafiek van g is de lijn $y = x + 1$ met perforatie $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$.

De grafiek van f heeft een perforatie (a, b) als $f(a)$ niet bestaat en $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Voorbeeld

Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 3}{2x + a}$.
Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
Bereken exact deze waarden van a en de coördinaten van de bijbehorende perforaties.

Uitwerking

$$f_a(x) = \frac{4x^2 - 4x - 3}{2x + a} = \frac{(2x + 1)(2x - 3)}{2x + a}$$

Er is een perforatie als $a = 1$ en als $a = -3$.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f_1(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{(2x + 1)(2x - 3)}{2x + 1} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} (2x - 3) = -1 - 3 = -4$$

Voor $a = 1$ is de perforatie $\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$.

$$\lim_{x \to 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim_{x \to 1\frac{1}{2}} \frac{(2x + 1)(2x - 3)}{2x - 3} = \lim_{x \to 1\frac{1}{2}} (2x + 1) = 3 + 1 = 4$$

Voor $a = -3$ is de perforatie $\left(1\frac{1}{2}, 4\right)$.

R 36 Zie het voorbeeld.
Reinier vindt de waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft als volgt.
- het nulpunt van de noemer is $x = -\frac{1}{2}a$
- $x = -\frac{1}{2}a$ invullen in de teller geeft $a^2 + 2a - 3$
- de nulpunten van $a^2 + 2a - 3$ zijn 1 en −3, dus de bedoelde waarden zijn $a = 1$ en $a = -3$.

Licht toe waarom je op deze manier de waarden van a kunt vinden.

37 Bereken op de manier van het voorbeeld de waarden van a waarvoor de grafieken van de volgende functies een perforatie hebben.

a $f_a(x) = \dfrac{9x^2 + 6x - 8}{3x + a}$

b $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 4x - 15}{2x + a}$

c $f_a(x) = \dfrac{5x^2 + 3x - 2}{x + a}$

d $f_a(x) = \dfrac{2x^2 - 11x + 15}{2x + a}$

38 Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door
$f_a(x) = \dfrac{2x^2 + x - 10}{2x + a}$.
Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
Bereken exact de waarden van a en de coördinaten van de bijbehorende perforatie.

39 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 9x - 9}{4x + a}$.

a De grafiek van f_{-2} heeft een scheve asymptoot.
Stel de formule van deze scheve asymptoot op.

b De functie f_4 heeft twee extreme waarden.
Bereken exact deze extreme waarden.

c Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
Bereken algebraïsch de coördinaten van deze perforaties.

D 40 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 9x - 9}{4x + a}$ van opgave 39.
De functies hebben een extreme waarde voor $x = 1$.
Bereken exact de andere extreme waarde.

41 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{x^2 - 4ax + 3a^2}{x - a}$.
Voor elke waarde van a heeft de grafiek van f_a een perforatie.
Bereken voor welke a deze perforatie op de lijn $y = x - 3$ ligt.

42 Voor elke waarde van a zijn gegeven de functies
$f_a(x) = \dfrac{3x^2 + 11x + a}{3x - 1}$.
De scheve asymptoot van de grafiek van f_0 is de lijn k: $y = mx + n$.
a Bereken voor welke x geldt $|f_0(x) - (mx + n)| < 0{,}01$.

Er is een waarde van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
b Bereken exact de coördinaten van deze perforatie.

43 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.
De grafiek van f snijdt de x-as in het punt A. De asymptoten van de grafiek van f snijden elkaar in het punt B.
Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijn k door de punten A en B door de perforatie van de grafiek van f gaat.

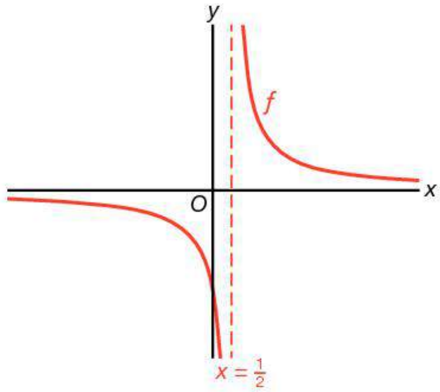
Informatief Situaties bij nul gedeeld door nul

Geldt bij een functie van de vorm $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ dat $t(a) = 0 \wedge n(a) = 0$, dan verwacht je een perforatie bij $x = a$, maar dat hoeft niet zo te zijn. We laten zien dat er ook een asymptoot of een sprong kan zijn.

Bij de functie $f(x) = \dfrac{4x - 2}{4x^2 - 4x + 1}$ is zowel de teller als de noemer 0 voor $x = \frac{1}{2}$. Herleiden geeft

$$f(x) = \frac{4x - 2}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{2(2x - 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{2}{2x - 1}.$$

De lijn $x = \frac{1}{2}$ is verticale asymptoot van de grafiek van f.

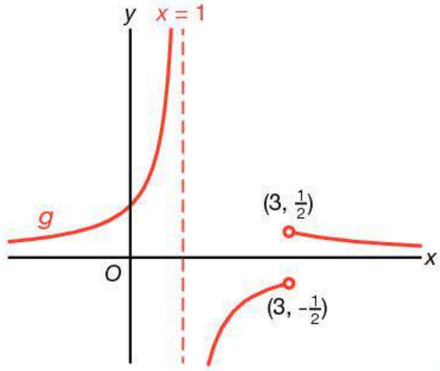


Bij de functie $g(x) = \dfrac{|x - 3|}{x^2 - 4x + 3}$ is zowel de teller als de noemer 0 voor $x = 3$.

$$\lim_{x \downarrow 3} g(x) = \lim_{x \downarrow 3} \frac{|x - 3|}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 1)(x - 3)} = \lim_{x \downarrow 3} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \uparrow 3} g(x) = \lim_{x \uparrow 3} \frac{|x - 3|}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{-(x - 3)}{(x - 1)(x - 3)} = \lim_{x \uparrow 3} \frac{-1}{x - 1} = -\frac{1}{2}$$

Omdat $\lim_{x \downarrow 3} g(x) \neq \lim_{x \uparrow 3} g(x)$ bestaat $\lim_{x \to 3} g(x)$ niet.
De grafiek van g maakt een sprong bij $x = 3$.



A 44 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 + x - 6}$.

Het punt A is de perforatie van de grafiek van f. Het punt B is het snijpunt van de asymptoten van de grafiek van f.
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt C van de lijn k door de punten A en B met de y-as.

A 45 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{16x^2 + 12x - 10}{4x + a}$.

a De grafiek van f_{10} snijdt de y-as in het punt A.
De lijn k raakt de grafiek van f_{10} in A.
Stel langs algebraïsche weg een vergelijking van k op.

b Bereken exact de extreme waarden van f_{14}.

c Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
Bereken exact deze waarden van a en de coördinaten van de bijbehorende perforatie.

Terugblik

Linker- en rechterlimiet

Als $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$, dan bestaat $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Hierbij is $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$ een linkerlimiet en $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ een rechterlimiet.

Om de waarde van p te berekenen waarvoor $\lim\limits_{x \to 3} f_p(x)$ bestaat

bij de functie $f_p(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ voor } x \leq 3 \\ x^2 + p \text{ voor } x > 3 \end{cases}$

los je de vergelijking $\lim\limits_{x \uparrow 3} f_p(x) = \lim\limits_{x \downarrow 3} f_p(x)$ op.

Je krijgt $\lim\limits_{x \uparrow 3} f_p(x) = f_p(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ en

$\lim\limits_{x \downarrow 3} f_p(x) = \lim\limits_{x \downarrow 3} (x^2 + p) = 9 + p$, dus $5 = 9 + p$ en dit geeft $p = -4$.

Perforaties

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{4x^2 - 11x + 6}{x - 2}$ is een rechte lijn met een perforatie voor $x = 2$, want $f(2)$ bestaat niet en $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ bestaat wel. Om de coördinaten van de perforatie te vinden bereken je $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$. Daartoe ontbind je $4x^2 - 11x + 6$ in twee factoren, waarvan de ene factor $(x - 2)$ is. Je krijgt $4x^2 - 11x + 6 = (x - 2)(4x - 3)$.
Dus $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 11x + 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 2)(4x - 3)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (4x - 3) = 5$.
De grafiek van f is de lijn $y = 4x - 3$ met de perforatie $(2, 5)$.

Bij de functie $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 16x + 15}{2x + a}$ zijn er twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
Omdat $4x^2 - 16x + 15 = (2x - 3)(2x - 5)$ is er een perforatie voor $a = -3$ en voor $a = -5$.

$\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} f_{-3}(x) = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} \dfrac{(2x - 3)(2x - 5)}{2x - 3} = \lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}} (2x - 5) = -2$, dus

voor $a = -3$ is de perforatie $\left(1\frac{1}{2}, -2\right)$.

$\lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} f_{-5}(x) = \lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} \dfrac{(2x - 3)(2x - 5)}{2x - 5} = \lim\limits_{x \to 2\frac{1}{2}} (2x - 3) = 2$, dus

voor $a = -5$ is de perforatie $\left(2\frac{1}{2}, 2\right)$.

$$f_a(x) = \frac{4x^2 - 16x + 15}{2x + a} = \frac{4\left(x^2 - 4x + \frac{15}{4}\right)}{2\left(x + \frac{1}{2}a\right)} = \frac{4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)}{2\left(x + \frac{1}{2}a\right)}$$

Dus er is een perforatie als $\frac{1}{2}a = -1\frac{1}{2}$ ofwel $a = -3$, of $\frac{1}{2}a = -2\frac{1}{2}$ ofwel $a = -5$.

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies

O 46 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{6e^x}{e^x + 1}$.

a Vul de tabel hiernaast in. Rond zo nodig af op twee decimalen.

b Schets de grafiek van f.

c De grafiek van f heeft twee horizontale asymptoten. Welke lijnen zijn dat, denk je?

x	-6	-3	0	3	6
$f(x)$					

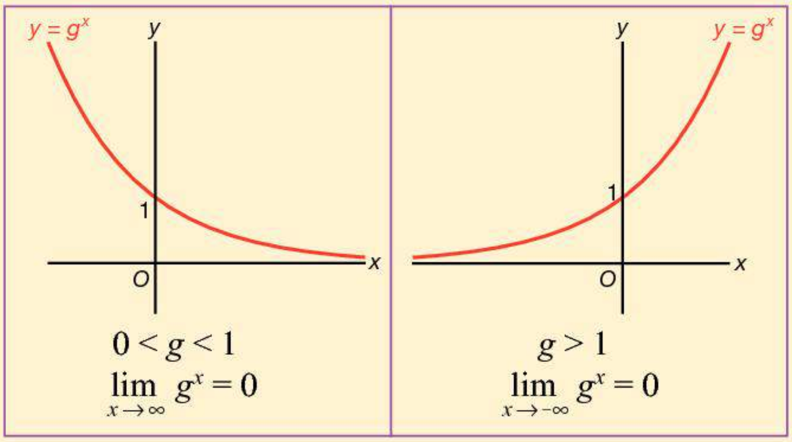
Theorie A Limieten bij exponentiële functies

In de figuur hieronder zie je nog eens de standaardgrafiek $y = g^x$.

Voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$ en voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$.

Zo is $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ en ook $\lim\limits_{x \to \infty} 2^{-x} = 0$. Dit laatste kun je inzien door te bedenken dat $2^{-x} = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Verder is bijvoorbeeld $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, immers $e > 1$.



figuur 13.9

Standaardlimieten
Voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$ en voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$.

Deze standaardlimieten gebruik je om de formules van de horizontale asymptoten van de grafiek van $f(x) = \dfrac{6e^x}{e^x + 1}$ te berekenen. Je krijgt $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{6e^x}{e^x + 1} = \dfrac{6 \cdot 0}{0 + 1} = 0$, dus voor $x \to -\infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 0$.

Deel teller en noemer door e^x.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{6}{1+0} = 6$$, dus voor $x \to \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 6$.

standaarlimiet
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{e^x} = 0$

Voorbeeld

Stel van elke asymptoot van de grafiek van $f(x) = \dfrac{2e^x+1}{e^x-2}$ de formule op.

Uitwerking

verticale asymptoot: $e^x - 2 = 0 \wedge 2e^x + 1 \neq 0$

$$e^x = 2 \quad \wedge\ 2e^x \neq -1$$
$$x = \ln(2)$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \ln(2)$.

horizontale asymptoten:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x+1}{e^x-2} = \frac{2\cdot 0+1}{0-2} = -\tfrac{1}{2}$$

Voor $x \to -\infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = -\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x+1}{e^x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{2}{e^x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2$$

Voor $x \to \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 2$.

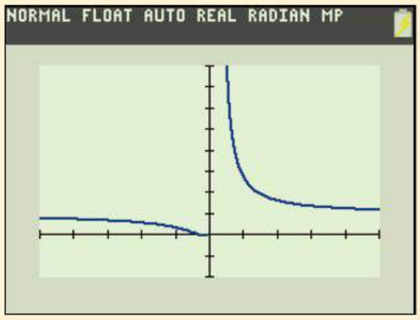
In de figuur hiernaast is de grafiek van $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ geplot. Om te onderzoeken wat er met de grafiek van f aan de hand is bij $x = 0$ berekenen we $\lim\limits_{x\uparrow 0} e^{\frac{1}{x}}$. Daartoe bekijken we eerst $\lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{1}{x}$.

Deze limiet bestaat niet. We noteren $\lim\limits_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$.

Zo krijg je $\lim\limits_{x\uparrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\frac{1}{x}\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

Dus voor $x \uparrow 0$ nadert $f(x)$ tot 0.

Verder is $\lim\limits_{x\downarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\frac{1}{x}\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, dus voor $x \downarrow 0$ is de lijn $x = 0$ verticale asymptoot van de grafiek.



figuur 13.10 Een plot van de grafiek van $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

47 Zie de theorie met de functie $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

a Bereken $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ en $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ en geef de vergelijking van de horizontale asymptoot van de grafiek van f.

Voor de afgeleide van f geldt $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

b Toon dit aan.

c Bereken $f'(-0{,}1)$ en $f'(-0{,}05)$.
Welke conclusie trek je hieruit?

48 Zie het voorbeeld met de functie $f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 2}$.

a Schets de grafiek van f met de asymptoten.

De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A. De lijn k raakt de grafiek van f in A.

b Toon langs algebraïsche weg aan dat de lijn k één van de asymptoten van de grafiek van f snijdt op de lijn $y = x$.

49 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \left(10 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$

b $\lim\limits_{x \to \infty} (2 + 4 \cdot \mathrm{e}^{-x})$

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x - 3}{\mathrm{e}^x + 2}$

d $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2 \cdot 3^x + 1}{3 \cdot 2^x + 1}$

50 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{5\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op en schets de grafiek van f.

b Geef het bereik van f.

c De lijn k raakt de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek met de y-as.
Bereken exact de richtingscoëfficiënt van k.

A 51 Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \frac{p\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + q}$.

a Voor welke q heeft de grafiek van $f_{-1,q}$ geen verticale asymptoot?

b Voor welke p en q is van de grafiek voor $x \to -\infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y = -3$ en voor $x \to \infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y = 4$?

c Voor welke p en q is de lijn $x = 2$ de verticale asymptoot van de grafiek en voor $x \to \infty$ de lijn $y = 2$ de horizontale asymptoot?
Wat is in dit geval de horizontale asymptoot voor $x \to -\infty$?

d Voor welke p en q heeft de grafiek van f een perforatie voor $x = -\ln(2)$?

A 52 Het aandeel hoogopgeleiden in de beroepsbevolking neemt sinds de jaren 60 van de vorige eeuw voortdurend toe. Zie de tabel.

AANDEEL HOOGOPGELEIDEN IN DE BEROEPSBEVOLKING

jaar	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2015
percentage	6	8	13	21	30	35	37

a Teken de punten van de tabel en teken door deze punten een vloeiende kromme.

Een onderzoeker stelt bij de tabel een formule op van de vorm $P = \dfrac{b\,\mathrm{e}^{ct+d}}{\mathrm{e}^{ct+d}+1}$.
Hierin is P het percentage van de beroepsbevolking met een hoge opleiding en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1960.
De onderzoeker gaat ervan uit dat er een grenswaarde hoort bij het aandeel van de beroepsbevolking met een hoge opleiding. Hij neemt aan dat deze grenswaarde 42% is.

b Licht toe dat deze aanname op grond van de figuur bij vraag a te verdedigen is. Welke van de parameters b, c, of d van de formule is nu bekend?

c Gebruik de percentages van de jaren 1960 en 2015 om c en d te berekenen. Rond c af op drie decimalen en d op één decimaal.

d De meeste percentages die volgen uit de formule verschillen van de waarden uit de tabel.
Voor welk jaar is dit verschil het grootst?

A 53 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}$.

a Bereken $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

b Toon aan dat de grafiek van f één horizontale asymptoot heeft en geef de formule van deze asymptoot.

c Los de ongelijkheid $f(x) \leq 1\frac{1}{2}$ exact op.

d De lijn k raakt de grafiek van f in A met $x_A = 1$.
Bereken exact de richtingscoëfficiënt van k.

13

O 54 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$.

a De grafiek van f heeft een verticale asymptoot.
Stel van deze asymptoot de formule op.

b Bereken het nulpunt van f.

c Vul de volgende tabel in. Rond zo nodig af op twee decimalen.

x	0,00001	0,0001	10	100
$f(x)$				

d Schets de grafiek van f.

e Wat is de uitkomst van $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$, denk je?

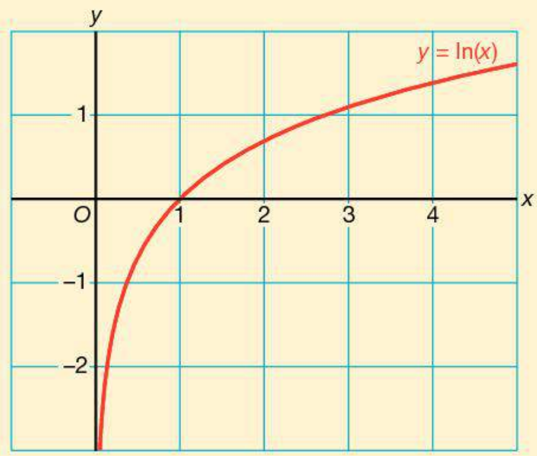
f Denk je dat de grafiek van f een horizontale asymptoot heeft?

Theorie B Limieten bij logaritmische functies

In figuur 13.11 is de standaardgrafiek $y = {}^a\log(x)$ met $a = \mathrm{e}$ ofwel $y = \ln(x)$ getekend.
Er geldt $\lim\limits_{x \downarrow 0} \ln(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$.

Dit gebruik je om bijvoorbeeld $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$

en $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}$ te berekenen.



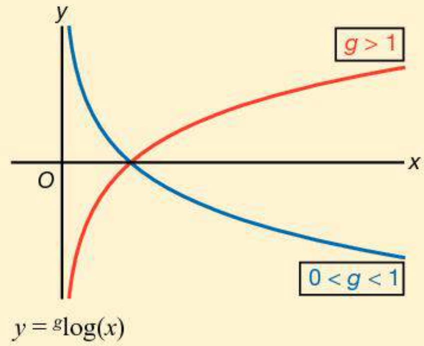
figuur 13.11

Je krijgt $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim\limits_{\ln(x) \to -\infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim\limits_{\ln(x) \to -\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\ln(x)}} = \dfrac{1}{1 - 0} = 1$

en $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim\limits_{\ln(x) \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 1} = \lim\limits_{\ln(x) \to \infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\ln(x)}} = \dfrac{1}{1 - 0} = 1$.

Voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \to \infty} {}^g\log(x) = -\infty$.

Voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{x \to \infty} {}^g\log(x) = \infty$.



Bij het berekenen van $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x)}{\ln(x^2) + 1}$ gebruik je een rekenregel voor logaritmen. Je krijgt

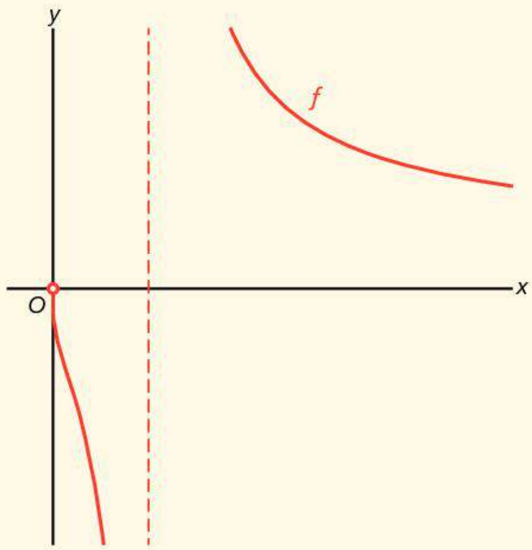
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x^2) + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{2\ln(x) + 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{1}{2 + \dfrac{1}{\ln(x)}} = \frac{1}{2 + 0} = \tfrac{1}{2}.$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{4}{2\ln(x) - 1}$. In de figuur hiernaast zie je een schets van de grafiek van f.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Bereken $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.



figuur 13.12

Uitwerking

a verticale asymptoot: $2\ln(x) - 1 = 0$

$$\ln(x) = \tfrac{1}{2}$$
$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

De verticale asymptoot is de lijn $x = \sqrt{e}$.

horizontale asymptoot:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4}{2\ln(x) - 1} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{4}{2\ln(x) - 1} = 0$$

De horizontale asymptoot is de lijn $y = 0$.

b $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{4}{2\ln(x) - 1} = \lim\limits_{\ln(x) \to -\infty} \dfrac{4}{2\ln(x) - 1} = 0$

55 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4\ln(x)}{1 + \ln(x)}$

b $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x^2)}{1 + \ln(x^2)}$

c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln|x|}{4 + \ln(x^2)}$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln^2(x)}{2 - \ln^2(x)}$

56 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{2\ln(x) - 3}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Bereken $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

c Stel langs algebraïsche weg een vergelijking op van de lijn k die de grafiek van f raakt in het snijpunt A van de grafiek met de x-as.

d Stel het functievoorschrift op van de inverse functie van f.

e Geef van elke asymptoot van de grafiek van f^{inv} de formule.

A 57 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x^2) - 4}{\ln(x^2) - 1}$.

a Bereken $\lim\limits_{x \uparrow 0} f(x)$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x)$.

b Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

c Los exact op $f(x) \leq 10$.

Terugblik

Limieten bij exponentiële functies

Je gebruikt de standaardlimieten

- voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \to \infty} g^x = 0$
- voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \to -\infty} g^x = 0$.

Bij $f(x) = 6 - 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x$ krijg je $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(6 - 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x\right) = 6 - 3 \cdot 0 = 6$.

Bij $g(x) = 2 + 4e^x$ krijg je $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2 + 4e^x) = 2 + 4 \cdot 0 = 2$.

Bij de functie $h(x) = \dfrac{5e^x + 4}{2e^x - 6}$ krijg je de formules van de asymptoten van de grafiek als volgt.

Noemer = 0 en teller $\neq$ 0 geeft $e^x = 3$ ofwel $x = \ln(3)$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = \ln(3)$.

Omdat $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5e^x + 4}{2e^x - 6} = \dfrac{5 \cdot 0 + 4}{2 \cdot 0 - 6} = -\frac{2}{3}$, is voor $x \to -\infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y = -\frac{2}{3}$.

Omdat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5e^x + 4}{2e^x - 6} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 + \dfrac{4}{e^x}}{2 - \dfrac{6}{e^x}} = \dfrac{5 + 0}{2 - 0} = 2\frac{1}{2}$, is voor $x \to \infty$ de horizontale asymptoot de lijn $y = 2\frac{1}{2}$.

Limieten bij logaritmische functies

Je gebruikt

- voor $0 < g < 1$ is $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = \infty$ en $\lim\limits_{x \to \infty} {}^g\log(x) = -\infty$
- voor $g > 1$ is $\lim\limits_{x \downarrow 0} {}^g\log(x) = -\infty$ en $\lim\limits_{x \to \infty} {}^g\log(x) = \infty$.

Bij de functie $f(x) = \dfrac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6}$ krijg je

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6} = \lim_{\ln(x) \to -\infty} \frac{5 + \dfrac{4}{\ln(x)}}{2 - \dfrac{6}{\ln(x)}} = \frac{5 + 0}{2 - 0} = 2\tfrac{1}{2} \text{ en}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{5\ln(x) + 4}{2\ln(x) - 6} = \lim_{\ln(x) \to \infty} \frac{5 + \dfrac{4}{\ln(x)}}{2 - \dfrac{6}{\ln(x)}} = \frac{5 + 0}{2 - 0} = 2\tfrac{1}{2}.$$

Dus voor $x \downarrow 0$ nadert de grafiek het punt $\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$ en voor $x \to \infty$ is de horizontale asymptoot de lijn $y = 2\frac{1}{2}$.

Voor de verticale asymptoot moet gelden noemer = 0 en teller $\neq$ 0.

Dit geeft $\ln(x) = 3$ ofwel $x = e^3$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van f is de lijn $x = e^3$.

Diagnostische toets

13.1 Evenredigheden en inverse functies

1 Gegeven is dat y evenredig is met $\dfrac{2x+3}{5-x}$.
Voor $x = 11$ is $y = 5$.
Stel de formule van y op en bereken $\lim\limits_{x \to \infty} y$.

2 Gegeven is dat $\dfrac{|x|}{2x+5}$ omgekeerd evenredig is met y.
Voor $x = -6$ is $y = 2$.
Stel de formule van y op en bereken $\lim\limits_{x \to -\infty} y$.

3 Stel het functievoorschrift op van de inverse van de volgende functies.

a $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$

b $g(x) = 2 + \dfrac{3}{5x+2}$

c $h(x) = \dfrac{8x-5}{x}$

13.2 Asymptoten bij gebroken functies

4 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4+5x}{(x^2+2)(x^2-2)}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+2x-2}{x^3+x^2+3}$

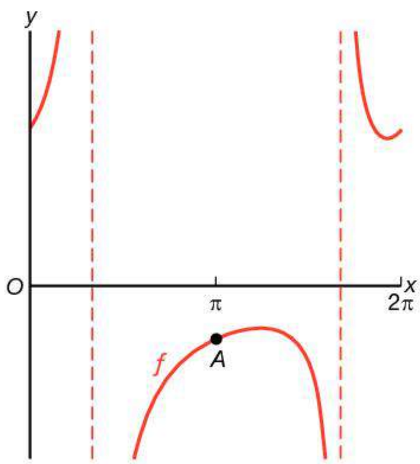
c $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x^3+x+3|}{(x^2+2)(x-2)}$

d $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|3-x^2|+5x^2+3}{2x^2-5x}$

5 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{x-1}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.
b Bereken exact de extreme waarden van f.
c Los exact op $f(x) \geq 3\frac{1}{2}$.

6 Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{\sin(x)+2}{2\cos(x)-1}$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.
Op de grafiek ligt het punt A met $x_A = \pi$. De lijn k raakt de grafiek in A en snijdt de asymptoten van de grafiek in de punten B en C.
Bereken exact de afstand tussen de punten B en C.



figuur 13.13

13.3 Limieten en perforaties

7 Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \begin{cases} 2\cos(\pi x) & \text{voor } x < 1 \\ px^2 + q & \text{voor } 1 < x < 2 \\ 2x + 5 & \text{voor } x > 2 \end{cases}$

Bereken exact de waarden van p en q waarvoor $\lim\limits_{x \to 1} f_{p,q}(x)$ en $\lim\limits_{x \to 2} f_{p,q}(x)$ bestaan.

8 Gegeven zijn de functies $f_a(x) = \dfrac{12x^2 - 25x + 12}{x + a}$.

a Stel de formule op van de scheve asymptoot van de grafiek van f_1.

b Bereken exact de extreme waarden van f_0.

c Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie heeft.
Bereken exact deze waarden van a en de coördinaten van de bijbehorende perforatie.

13.4 Limieten bij exponentiële en logaritmische functies

9 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2e^x + 5}{3e^x + 2}$ **b** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(4 - \frac{1}{2}e^{-2x+1}\right)$

10 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 2}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op, schets de grafiek van f en geef het bereik van f.

b De lijn k raakt de grafiek van f in het snijpunt van de grafiek met de y-as en snijdt de x-as in het punt S.
Bereken exact de coördinaten van S.

11 Bereken.

a $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\ln(x) + 1}{1 - \ln(x^2)}$ **b** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(x) - 6}{\ln(x^2) + 2}$

12 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{\ln(x^2) + 2}$.

a Bereken de coördinaten van de perforatie van de grafiek van f.

b Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

Tijdens de Olympische Spelen van 1968 introduceerde Richard Fosbury een geheel nieuwe manier van hoogspringen. Vóór 1968 werd bij het hoogspringen eerst een been over de lat geslingerd en daarna volgde zijdelings het lichaam. Fosbury sprong echter achterover over de lat: eerst zijn hoofd en daarna zijn gekromde rug en benen. Zo bleef het zwaartepunt van zijn lichaam onder de lat. Hij won de gouden medaille en sindsdien gebruiken alle atleten de 'Fosbury Flop'.

Wat leer je?

- Vergelijkingen gebruiken bij meetkundige problemen.
- Berekeningen maken met hoeken tussen lijnen.
- Problemen oplossen bij raaklijnen aan cirkels.
- Bij homogene vormen en puntmassa's de plaats van het zwaartepunt berekenen.
- Vectoren gebruiken bij het berekenen van hoeken, snelheid en versnelling.

Meetkunde toepassen

14

Voorkennis Goniometrie, stellingen en lijnen

14

Theorie A Regels, formules en stellingen

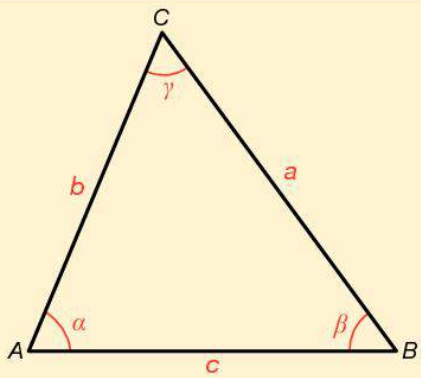
De sinusregel en de cosinusregel
Voor het berekenen van hoeken en afstanden in driehoeken die niet gelijkbenig of rechthoekig zijn, kun je de sinusregel of de cosinusregel gebruiken.

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

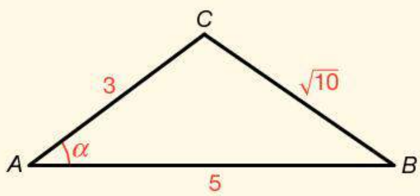


De sinusregel en de cosinusregel gelden ook in stomphoekige driehoeken.
Om de sinusregel te kunnen gebruiken moet in elk geval een zijde met de overstaande hoek zijn gegeven.

De cosinusregel gebruik je
- voor het berekenen van een zijde van een driehoek als twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven
- voor het berekenen van een hoek van een driehoek als de drie zijden zijn gegeven.

Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC hiernaast.
Bereken $\cos(\alpha)$ exact.

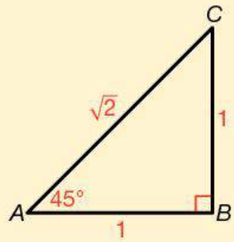


figuur 14.1

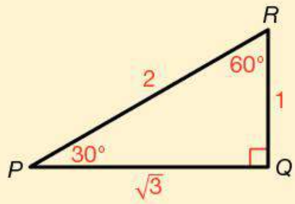
Uitwerking
De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\alpha)$
$10 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(\alpha)$
$30\cos(\alpha) = 24$
$\cos(\alpha) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

Bijzondere rechthoekige driehoeken
Er zijn twee bijzondere rechthoekige driehoeken.

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.

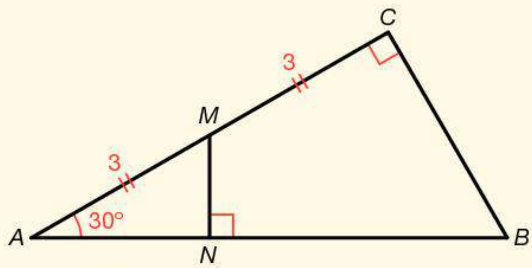


De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.



Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$ en $AC = 6$. Het punt M is het midden van AC en N ligt op AB zo, dat $\angle ANM = 90°$. Zie figuur 14.2.
Bereken BN exact.



figuur 14.2

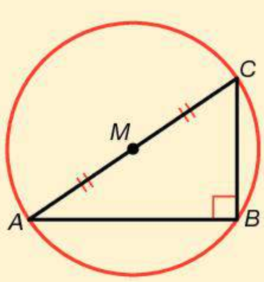
Uitwerking

In $\triangle ABC$ is $BC = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ en $AB = 4\sqrt{3}$.

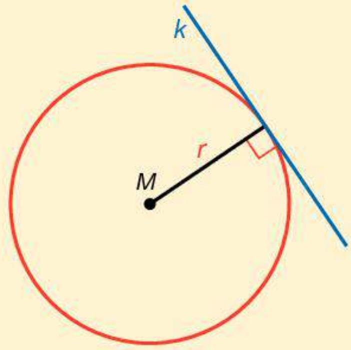
In $\triangle ANM$ is $MN = 1\frac{1}{2}$ en $AN = 1\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Dus $BN = AB - AN = 4\sqrt{3} - 1\frac{1}{2}\sqrt{3} = 2\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

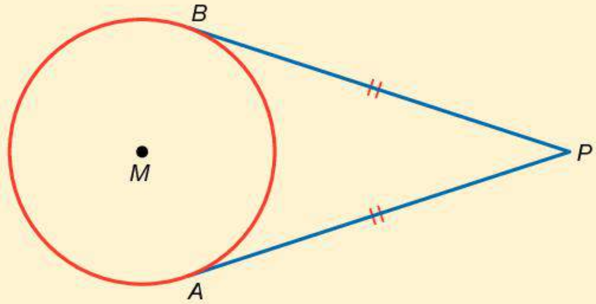
Stellingen
Bij het oplossen van meetkundige problemen mag je de stellingen hieronder en op de volgende bladzijde zonder verdere toelichting gebruiken.
- Van een rechthoekige driehoek is het midden van de schuine zijde het middelpunt van de omgeschreven cirkel.
- Een driehoek waarvan een zijde de middellijn van de omgeschreven cirkel is, is rechthoekig.



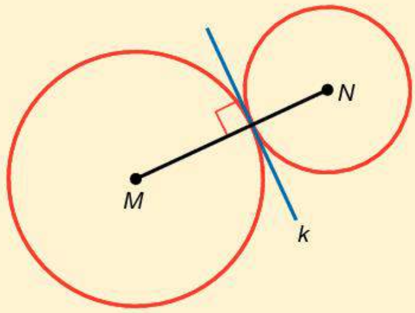
- Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.



- Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.



- De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.



Verder gebruik je vaak gelijkvormige driehoeken. Om in de figuur hiernaast AD te berekenen, gebruik je de gelijkvormige driehoeken ADE en ABC en stel je $AD = x$.

Omdat $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ krijg je $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DE}{BC}$,

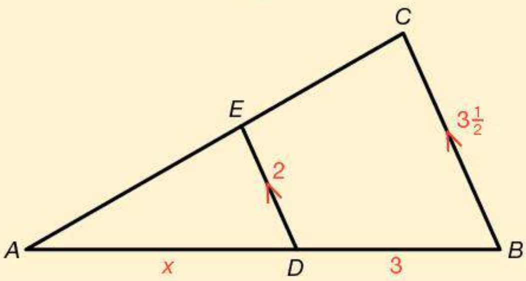
dus $\dfrac{x}{x+3} = \dfrac{2}{3\frac{1}{2}}$

$3\frac{1}{2}x = 2x + 6$

$1\frac{1}{2}x = 6$

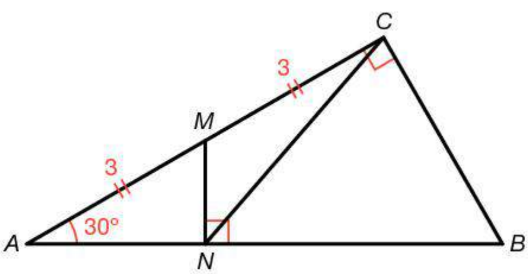
$x = 4$

Dus $AD = 4$.



figuur 14.3

1 In figuur 14.4 is driehoek ABC van het voorbeeld op de vorige bladzijde nog eens getekend.
Bereken CN exact.

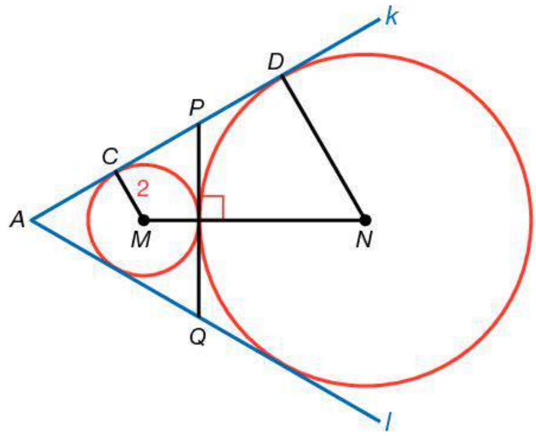


figuur 14.4

2 Gegeven is de cirkel met middelpunt M en straal 2. Vanuit het punt A worden de raaklijnen k en l aan de cirkel getekend zo, dat $\angle(k, l) = 60°$. De cirkel met middelpunt N raakt de cirkel met middelpunt M en de lijnen k en l. De raaklijn in het raakpunt van de cirkels snijdt k in P en l in Q. Zie figuur 14.5.

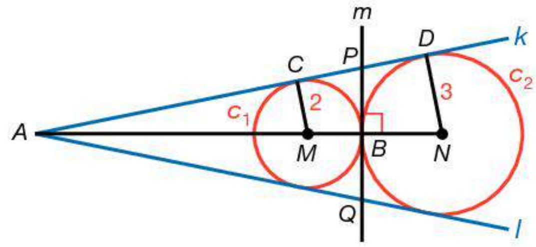
a Bereken exact de straal van de cirkel met middelpunt N.

b Bereken exact de lengte van het lijnstuk PQ.



figuur 14.5 $\angle(k, l) = 60°$

3 Gegeven is de cirkel c_1 met middelpunt M en straal 2 en de cirkel c_2 met middelpunt N en straal 3 die elkaar raken in het punt B. De gemeenschappelijke raaklijn in B is m. De gemeenschappelijke raaklijnen k en l snijden elkaar in het punt A. Lijn m snijdt k in P en l in Q. Zie figuur 14.6.
Bereken exact de lengte van PQ.



figuur 14.6

Theorie B Lijnen

Je kunt een lijn op de volgende manieren noteren.

- De formule $y = ax + b$ met a de richtingscoëfficiënt en het punt $(0, b)$ het snijpunt met de y-as.
- De lineaire vergelijking $ax + by = c$ met de variabelen x en y.
- De assenvergelijking $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. De snijpunten met de assen zijn $(a, 0)$ en $(0, b)$.
- De parametervoorstelling $x(t) = at + c \wedge y(t) = bt + d$ met de parameter t.
- De vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a})$. Hierbij is $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ en $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. De lijn gaat door de punten A en B.

Zo kun je de lijn k door de punten $A(2, 0)$ en $B(0, -5)$ op de volgende vijf manieren noteren.

1 Vanwege de gegevens begin je met de assenvergelijking. Je krijgt $k\colon \frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1$.

2 Uit $k\colon \frac{x}{2} + \frac{y}{-5} = 1$ volgt $5x - 2y = 10$, dus een lineaire vergelijking is $k\colon 5x - 2y = 10$.

3 Uit $5x - 2y = 10$ volgt $-2y = -5x + 10$, dus de formule is k: $y = 2\frac{1}{2}x - 5$.

4 Stel je $x = 2t$, dan volgt uit de formule dat $y = 2\frac{1}{2} \cdot 2t - 5 = 5t - 5$, dus een parametervoorstelling is k: $x(t) = 2t \wedge y(t) = 5t - 5$.

5 Uit de coördinaten van A en B volgt dat de richtingsvector van k gelijk is aan $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Neem je als steunvector $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan krijg je de vectorvoorstelling k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Een richtingsvector van een lijn staat loodrecht op een normaalvector van de lijn. Dit gebruik je om een vergelijking van de vorm $ax + by = c$ om te zetten in een vectorvoorstelling en omgekeerd.

Van de lijn m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ is $\vec{r}_m = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dit geeft m: $x + 4y = c$.
Invullen van het punt $(3, 2)$ geeft $c = 3 + 4 \cdot 2 = 11$, dus m: $x + 4y = 11$.

Een normaalvector van de lijn l: $ax + by = c$ is $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

4 De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(5, 7)$.
Noteer de lijn op de vijf manieren die in de theorie zijn genoemd.

5 Gegeven is de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a Stel een vergelijking op van k in de vorm $ax + by = c$.
b Stel een assenvergelijking van k op.
c Geef een parametervoorstelling van k.

6 De lijnen k: $y = ax - 4$ en l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ vallen samen.

Bereken a en b.

7 De lijnen m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ p \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en n: $x(t) = 2t - 3 \wedge y(t) = qt + 2$ vallen samen.
Bereken p en q.

Theorie C Lijnen en hoeken

De richtingshoek van een lijn k is de hoek α waarover de x-as moet draaien om samen te vallen met k. Hierbij is $-90° < \alpha \leq 90°$. Er geldt $\tan(\alpha) = \text{rc}_k$. Bij de lijn k: $2x + 3y = 6$ is $\text{rc}_k = -\frac{2}{3}$, dus de richtingshoek is ongeveer $-33{,}7°$.
Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β, waarbij $\alpha > \beta$, geldt $\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90°$ en $\varphi = 180° - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90°$.
Bij het berekenen van de hoek tussen de lijnen k: $2x + 3y = 6$ en l: $7x - 3y = 10$ krijg je
$\text{rc}_k = -\frac{2}{3}$, dus $\tan(\alpha) = -\frac{2}{3}$ en dit geeft $\alpha = -33{,}69...°$
$\text{rc}_l = \frac{7}{3}$, dus $\tan(\beta) = \frac{7}{3}$ en dit geeft $\beta = 66{,}80...°$
$\beta - \alpha = 66{,}80...° - -33{,}69...° = 100{,}49...°$
De hoek tussen k en l is dus $180° - 100{,}49...° \approx 79{,}5°$.
Zijn van de lijnen vectorvoorstellingen gegeven, dan gebruik je dat voor de hoek tussen twee snijdende lijnen k en l geldt dat

$$\cos(\angle(k, l)) = \left|\cos\left(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l)\right)\right| = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}.$$

Bij de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ en l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ is

$$\cos(\angle(k, l)) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|3 \cdot 3 - 2 \cdot 7|}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{9+49}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{58}} = \frac{5}{\sqrt{754}}$$

en dit geeft $\angle(k, l) \approx 79{,}5°$.
De lijnen k en l waarvan hierboven vectorvoorstellingen zijn gegeven, zijn dezelfde lijnen k en l waarvan eerder vergelijkingen waren gegeven. Je kunt dit nagaan.

Geef hoeken in graden in één decimaal nauwkeurig tenzij anders gevraagd.

8 Bereken de hoek tussen de lijnen.
- **a** k: $3x - 4y = 2$ en l: $x + 2y = 5$
- **b** m: $4x + y = 5$ en n: $3x - y = 4$
- **c** p: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en q: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

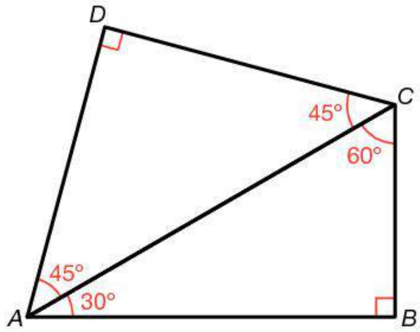
9 Bereken de hoek tussen de lijnen.
- **a** k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ en l: $4x + 5y = 6$
- **b** m: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ en n: $y = 3x - 4$
- **c** p door $(2, 0)$ en $(0, 3)$ en q door $(4, 4)$ en $(5, -2)$

14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren

14 **O 1** Zie figuur 14.7 met de vierhoek $ABCD$.

a Stel $AB = x$ en toon aan dat hieruit volgt dat de omtrek van $ABCD$ gelijk is aan $x + \frac{1}{3}x\sqrt{3} + \frac{2}{3}x\sqrt{6}$.

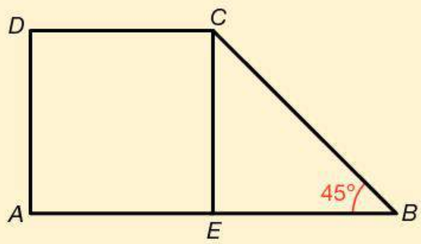
b De omtrek van $ABCD$ is gelijk aan 10.
Bereken AB in drie decimalen nauwkeurig.



figuur 14.7

Theorie A Vergelijkingen en bijzondere rechthoekige driehoeken

In opgave 1 heb je gebruik gemaakt van verhoudingen in de twee bijzondere rechthoekige driehoeken.
De vierhoek $ABCD$ in figuur 14.8 is opgebouwd uit het vierkant $AECD$ en de gelijkbenige rechthoekige driehoek BEC. De omtrek van de vierhoek is 28. Om AB te berekenen stel je $AE = x$, dus ook $AD = CE = CD = x$.
Uit $CE = x$ volgt $BE = x$ en $BC = x\sqrt{2}$.
De omtrek is $AE + BE + BC + CD + AD = 4x + x\sqrt{2}$.



figuur 14.8

Zo krijg je de vergelijking $4x + x\sqrt{2} = 28$, dus
$x\left(4 + \sqrt{2}\right) = 28$ en $x = \dfrac{28}{4 + \sqrt{2}}$.

Om bij $\dfrac{28}{4 + \sqrt{2}}$ de wortel uit de noemer weg te werken gebruik je het merkwaardige product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{28}{4 + \sqrt{2}} = \frac{28}{4 + \sqrt{2}} \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} = \frac{28\left(4 - \sqrt{2}\right)}{16 - 2}$$
$$= 2\left(4 - \sqrt{2}\right) = 8 - 2\sqrt{2}$$

$(4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2}) =$
$4^2 - (\sqrt{2})^2 = 16 - 2$

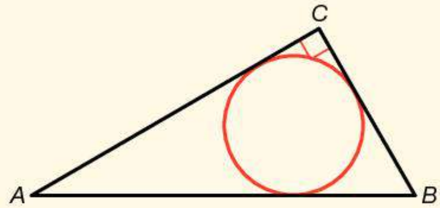
Dus $AB = 2\left(8 - 2\sqrt{2}\right) = 16 - 4\sqrt{2}$.

Om bij $\dfrac{12}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ de wortels uit de noemer weg te werken vermenigvuldig je teller en noemer met $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.
Je krijgt

$$\frac{12}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{12\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)}{5 - 2} = 4\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{5} + 4\sqrt{2}.$$

Voorbeeld

Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur 14.9 met $\angle A = 30°$ en $AB = 8$. In de driehoek past precies een cirkel. Bereken exact de straal van deze cirkel. Schrijf het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$.



figuur 14.9

Uitwerking

Stel de straal van de cirkel is r.

$AB = 8$ geeft $BC = 4$

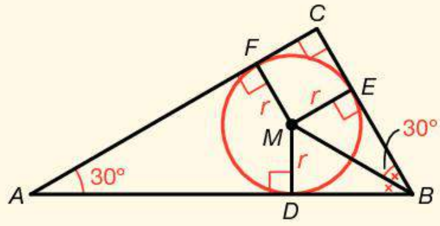
$ME = r$ geeft $BE = r\sqrt{3}$ en $CE = r$

Dus $r\sqrt{3} + r = 4$

$r\left(\sqrt{3} + 1\right) = 4$

$$r = \frac{4}{\sqrt{3}+1} = \frac{4}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3-1} = 2\sqrt{3} - 2.$$

Dus $r = -2 + 2\sqrt{3}$.



2 Herleid tot de vorm $a + b\sqrt{c}$.

a $\dfrac{14}{3-\sqrt{2}}$

b $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$

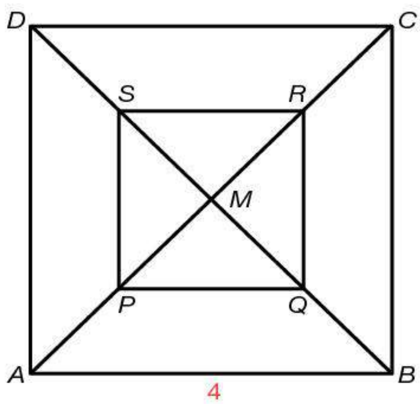
c $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

d $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$

e $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

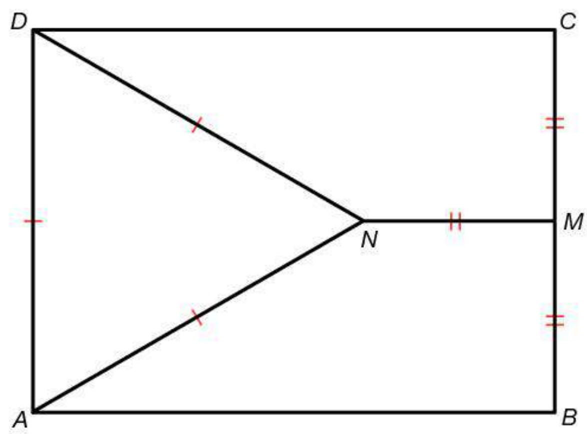
f $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

3 Zie figuur 14.10. $ABCD$ is een vierkant met zijde 4. Het snijpunt van de diagonalen is M. Van het vierkant $PQRS$ liggen de hoekpunten op de diagonalen AC en BD. De omtrek van het gelijkbenig trapezium $ABQP$ is 9. De lengte van PQ kan geschreven worden in de vorm $a + b\sqrt{c}$.
Bereken exact de waarden van a, b en c.



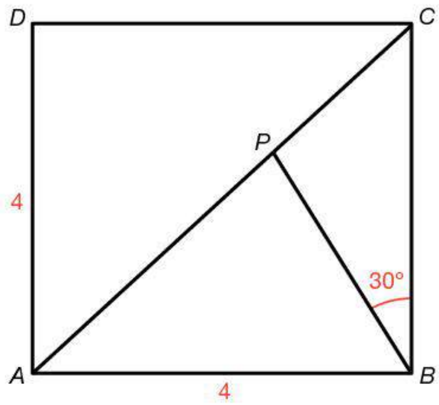
figuur 14.10

4 In figuur 14.11 is in de rechthoek $ABCD$ de gelijkzijdige driehoek ADN getekend. Het punt M is het midden van BC. Verder is $MN = BM$ en de omtrek van $ABCD$ is gelijk aan 20.
Bereken exact de lengte van AD en schrijf het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$.



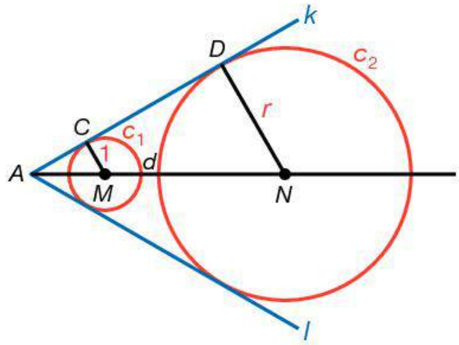
figuur 14.11

A 5 Gegeven is het vierkant *ABCD* met zijde 4. Op de diagonaal *AC* ligt het punt *P* zo, dat $\angle CBP = 30°$. Zie figuur 14.12.
Bereken exact de lengte van *AP* en schrijf het antwoord in de vorm $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$.



figuur 14.12

D 6 De lijnen *k* en *l* in figuur 14.13 snijden elkaar in het punt *A* en $\angle(k, l) = 60°$. De lijnen raken de cirkel c_1 met middelpunt *M* en straal 1.
Het punt *N* beweegt naar rechts over de lijn *AM* en is het middelpunt van de cirkel c_2 met straal *r* die de lijnen *k* en *l* raakt. Voor $r > 3$ is *d* de afstand tussen c_1 en c_2.
Toon aan dat de snelheid waarmee *d* verandert niet van *r* afhangt.



figuur 14.13

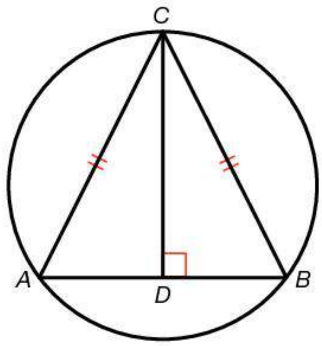
O 7 In figuur 14.14 is de gelijkbenige driehoek *ABC* met $AC = BC$ getekend, waarvan de hoogte *CD* gelijk is aan *AB*. Verder is de omgeschreven cirkel van deze driehoek getekend. De straal van deze cirkel is 6.
We vragen ons af wat de lengte van *AB* is.

a Teken figuur 14.14 over en noem het middelpunt van de cirkel *M*.

b Stel $DM = x$ en licht toe dat hieruit volgt dat m $AD = \frac{1}{2}x + 3$.

c Gebruik de stelling van Pythagoras in driehoek *ADM* en toon aan dat je de vergelijking $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$ krijgt.

d Los de vergelijking $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$ op.
Wat is de lengte van *AB*?



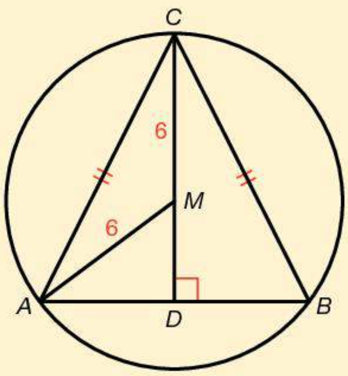
figuur 14.14 De straal van de cirkel is 6 en $CD = AB$.

Theorie B Vergelijkingen en de stelling van Pythagoras

In figuur 14.15 is de cirkel met driehoek *ABC* van opgave 7 nog eens getekend. In opgave 7 is $DM = x$ gesteld om *AB* te berekenen. Je kunt ook bijvoorbeeld $AD = x$ stellen. Dan is $CD = AB = 2x$, dus $DM = 2x - 6$. De stelling van Pythagoras in driehoek *ADM* geeft dan $AD^2 + DM^2 = AM^2$

$$x^2 + (2x - 6)^2 = 6^2$$
$$x^2 + 4x^2 - 24x + 36 = 36$$
$$5x^2 - 24x = 0$$
$$x(5x - 24) = 0$$
$$x = 0 \vee 5x = 24$$
$$x = 0 \vee x = 4{,}8$$

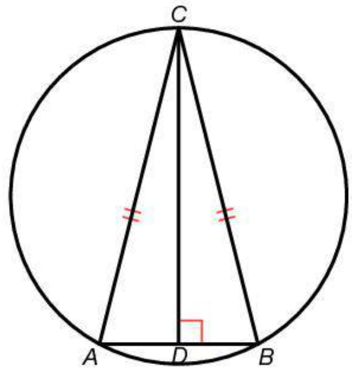
Dus $AD = 4{,}8$ en $AB = 2 \cdot 4{,}8 = 9{,}6$.



figuur 14.15

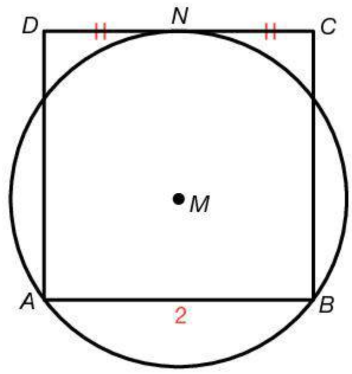
Je ziet dat deze uitwerking eenvoudiger is dan wat je in opgave 7 hebt gedaan.
In het algemeen is het raadzaam om na te gaan welk lijnstuk je x stelt voor een zo eenvoudig mogelijke uitwerking.

8 Gegeven is een cirkel met straal 6. De punten A, B en C liggen op de cirkel zo, dat $AC = BC$. Verder is de hoogte CD twee keer de lengte van AB.
Bereken exact de lengte van AB.



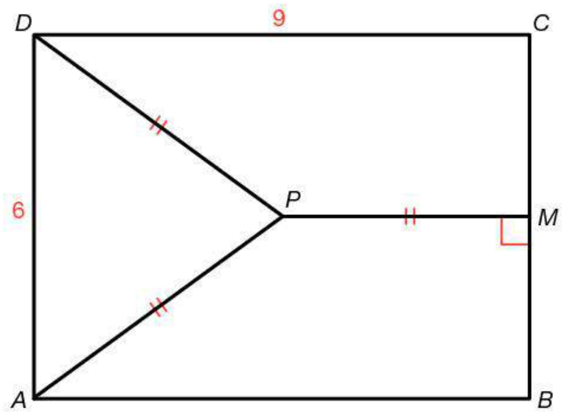
figuur 14.16 De straal van de cirkel is 6 en $CD = 2AB$.

9 Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 2. De cirkel met middelpunt M gaat door de punten A en B en het midden N van CD. Zie figuur 14.17.
Bereken exact de straal van de cirkel.



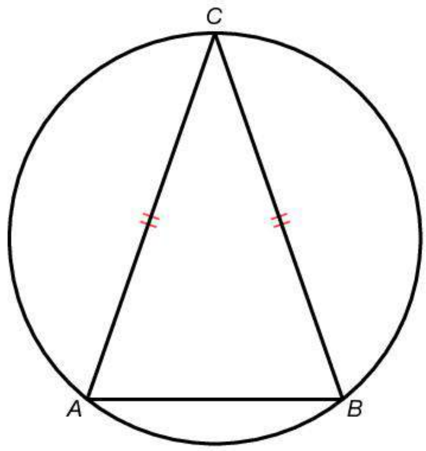
figuur 14.17

10 Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $AB = 9$ en $AD = 6$. Het punt M is het midden van BC. Het punt P ligt binnen de rechthoek zo, dat $AP = DP = MP$. Zie figuur 14.18.
Bereken exact de lengte van AP.



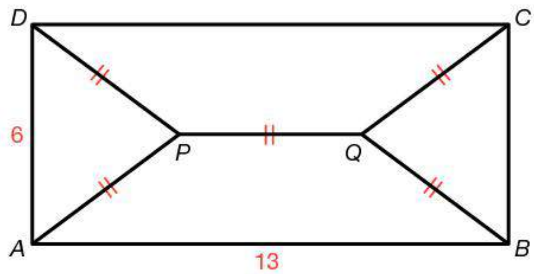
figuur 14.18

A 11 Gegeven is een cirkel met straal 6. De punten A, B en C liggen op de cirkel zo, dat $AC = BC$. Verder is $AC = 1\frac{1}{2}AB$. Zie figuur 14.19.
Bereken exact de lengte van AB.



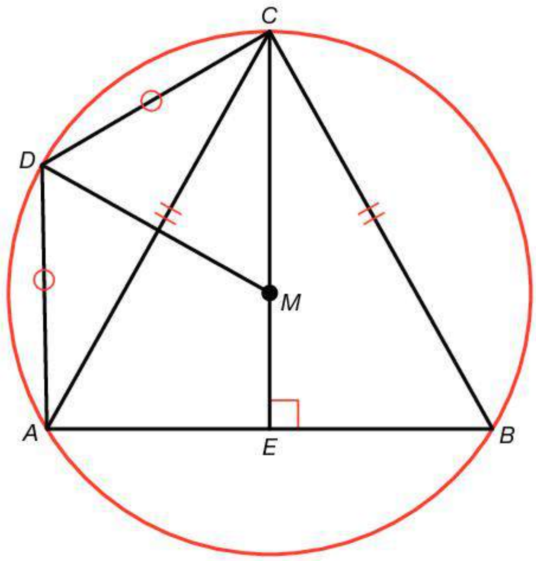
figuur 14.19

A 12 In de rechthoek $ABCD$ met $AB = 13$ en $AD = 6$ liggen de punten P en Q zo, dat $AP = DP = BQ = CQ = PQ$. Zie figuur 14.20.
Bereken exact de lengte van AP.



figuur 14.20

D 13 Gegeven is de cirkel met middelpunt M en straal 5. De punten A, B, C en D liggen op de cirkel zo, dat $AC = BC$ en $AD = CD$. Verder is $AB = CE$. Zie figuur 14.21.
Bereken exact de lengte van AD. Gebruik dat $DM \perp AC$.



figuur 14.21

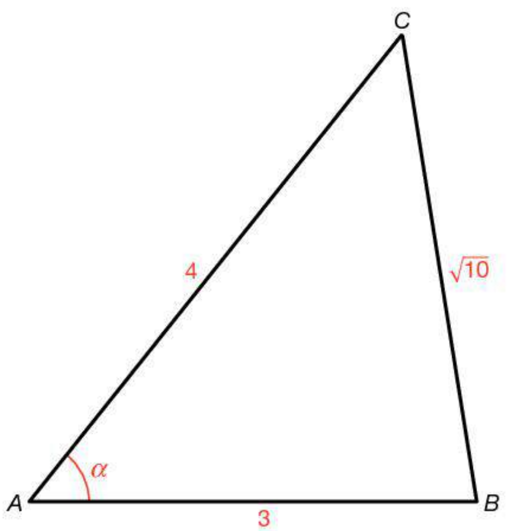
O 14 Gegeven is driehoek ABC met $AB = 3$, $AC = 4$ en $BC = \sqrt{10}$. Zie figuur 14.22 met $\angle A = \alpha$.
Er geldt $\cos(\alpha) = \frac{5}{8}$.

a Toon dit aan.

b Toon aan dat $\sin(\alpha) = \frac{1}{8}\sqrt{39}$. Gebruik $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$.

Uit $AB = 3$, $AC = 4$ en $\sin(\alpha) = \frac{1}{8}\sqrt{39}$ volgt $O(\triangle ABC) = \frac{3}{4}\sqrt{39}$.

c Licht dit toe.



figuur 14.22

Theorie C Goniometrische formules

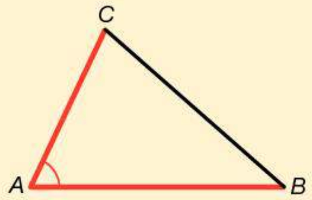
Bij berekeningen in meetkundige figuren kunnen goniometrische formules van pas komen.

$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$
$\sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$

$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$
$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$

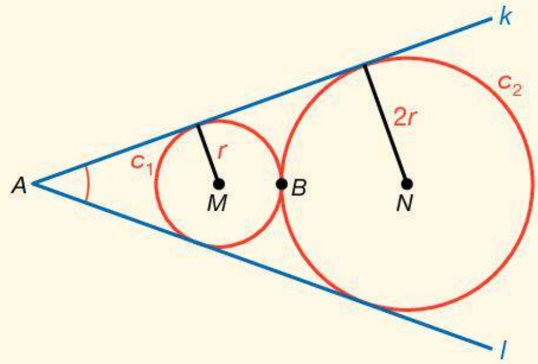
In opgave 14 heb je $\cos(\alpha)$ met de cosinusregel berekend. Daarna heb je de regel $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$ gebruikt om $\sin(\alpha)$ te berekenen.
Door de formule $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$ te gebruiken is vervolgens $O(\triangle ABC)$ exact te berekenen.

$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$



Voorbeeld

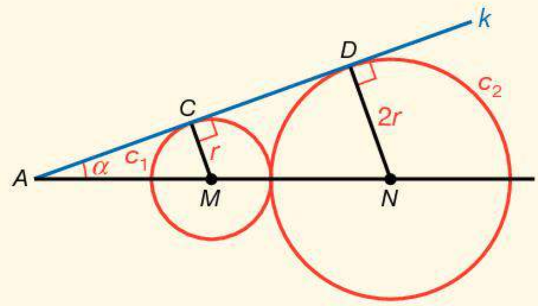
Gegeven is de cirkel c_1 met straal r en de cirkel c_2 met straal $2r$. De cirkels raken elkaar in het punt B. De gemeenschappelijke raaklijnen k en l snijden elkaar in het punt A. Zie figuur 14.23.
Bereken exact $\sin(\angle(k, l))$.



figuur 14.23

Uitwerking
Stel $AM = x$.

Uit $\triangle AMC \backsim \triangle AND$ volgt $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{MC}{ND}$, dus



$\dfrac{x}{x+3r} = \dfrac{r}{2r}$ ofwel $\dfrac{x}{x+3r} = \dfrac{1}{2}$

$2x = x + 3r$

$x = 3r$, dus $AM = 3r$.

$\sin(\angle MAC) = \dfrac{MC}{AM} = \dfrac{r}{3r} = \frac{1}{3}$, dus $\sin(\alpha) = \frac{1}{3}$.

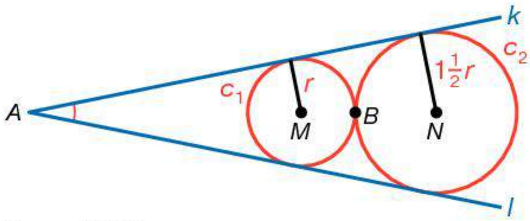
$$\left.\begin{array}{l}\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \\ \sin(\alpha) = \frac{1}{3}\end{array}\right\} \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1$$

$\cos^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \vee \cos(\alpha) = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$
vold.   vold. niet

$\sin(\angle(k, l)) = \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{4}{9}\sqrt{2}$

15 Gegeven is de cirkel c_1 met straal r en de cirkel c_2 met straal $1\frac{1}{2}r$. De cirkels raken elkaar in het punt B. De gemeenschappelijke raaklijnen k en l snijden elkaar in het punt A. Zie figuur 14.24.
Bereken exact $\sin(\angle(k, l))$.

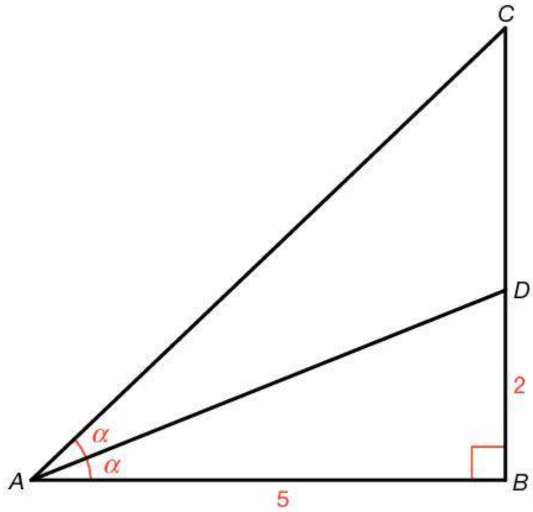


figuur 14.24

16 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 5$ en $\angle B = 90°$.
De bissectrice van $\angle A$ snijdt de zijde BC in het punt D zo, dat $BD = 2$.
Hieruit volgt dat $\cos(\angle BAC) = \frac{21}{29}$.

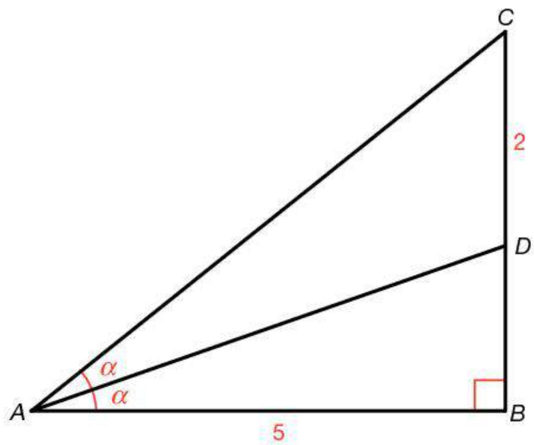
a Toon dit aan.

b Bereken exact AC en CD.



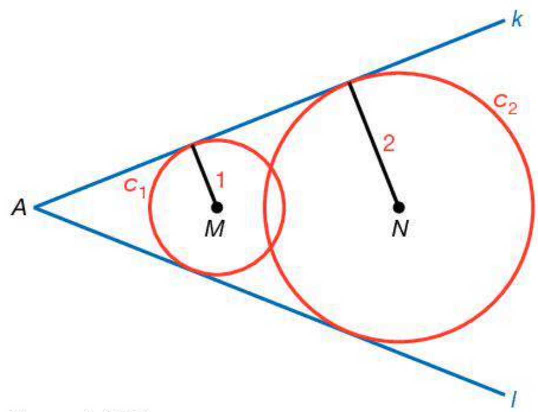
figuur 14.25

D 17 Gegeven is driehoek ABC met $AB = 5$ en $\angle B = 90°$. De bissectrice van hoek A snijdt de zijde BC in het punt D zo, dat $CD = 2$.
Bereken BD in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 14.26

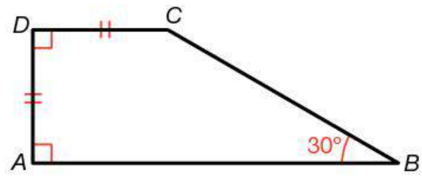
A 18 Gegeven is de cirkel c_1 met middelpunt M en straal 1 en de cirkel c_2 met middelpunt N en straal 2. De cirkels snijden elkaar en de gemeenschappelijke raaklijnen k en l snijden elkaar in het punt A. Zie figuur 14.27.
Bereken exact de afstand tussen de punten M en N als gegeven is dat $\cos(\angle(k, l)) = \frac{119}{169}$.

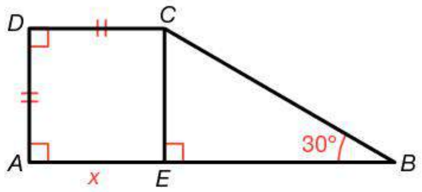


figuur 14.27

Terugblik

Vergelijkingen en bijzondere rechthoekige driehoeken

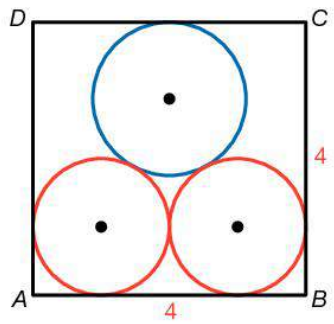


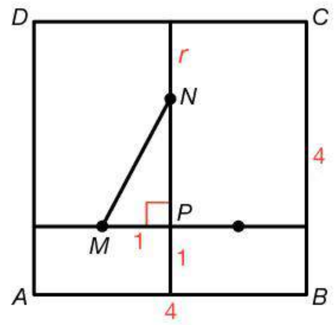


Van de vierhoek in de figuur hiernaast is de omtrek 22.
Om AB te berekenen ga je als volgt te werk.

- Teken $CE \perp AB$ en stel $AE = x$.
- Druk de andere lijnstukken uit in x.
  Je krijgt $AD = CD = CE = x$, $BE = x\sqrt{3}$ en $BC = 2x$.
- Druk de omtrek uit in x.
  Je krijgt omtrek $= AE + BE + BC + CD + AD =$
  $x + x\sqrt{3} + 2x + x + x = 5x + x\sqrt{3}$.
- Gebruik omtrek = 22 om een vergelijking op te stellen en los deze vergelijking op. Je krijgt
  $5x + x\sqrt{3} = 22$
  $x(5 + \sqrt{3}) = 22$
  $$x = \frac{22}{5+\sqrt{3}} = \frac{22}{5+\sqrt{3}} \cdot \frac{5-\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{22(5-\sqrt{3})}{25-3} = 5 - \sqrt{3}$$
- Geef antwoord op de vraag.
  Je krijgt $AB = AE + BE = x + x\sqrt{3} = 5 - \sqrt{3} + (5 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}$
  $= 5 - \sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3 = 2 + 4\sqrt{3}$

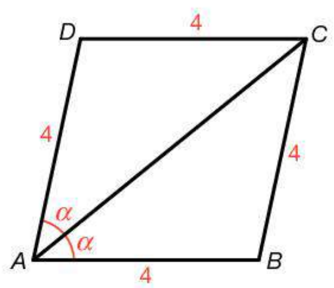
Vergelijkingen en de stelling van Pythagoras





In een vierkant met zijde 4 zijn drie cirkels getekend zoals hiernaast. De onderste twee cirkels raken elkaar, zijde AB en de zijden AD en BC. De bovenste cirkel raakt de twee andere cirkels en zijde CD.
Om de straal van de bovenste cirkel te berekenen gebruiken we de figuur hiernaast.
Er geldt $MP = 1$, $MN = r + 1$ en $NP = 4 - 1 - r = 3 - r$.
De stelling van Pythagoras in driehoek MPN geeft $1^2 + (3 - r)^2 = (r + 1)^2$.
Dus $1 + 9 - 6r + r^2 = r^2 + 2r + 1$.
Dit geeft $8r = 9$, dus $r = 1\frac{1}{8}$.

Goniometrische formules



Van de ruit in de figuur hiernaast is gegeven dat $\cos(\angle BAC) = 0{,}8$. Om exact de oppervlakte van de ruit te berekenen, kun je goniometrische formules gebruiken. Uit $\cos(\angle BAC) = 0{,}8$ volgt dat $\cos(\angle BAD) = 2 \cdot 0{,}8^2 - 1 = 0{,}28$.
Uit $\cos(\angle BAD) = 0{,}28$ volgt $\sin(\angle BAD) = \sqrt{1 - 0{,}28^2} = 0{,}96$.
De oppervlakte van de ruit is $O(ABCD) = 2 \cdot O(\triangle ABD) =$
$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin(\angle BAD) = 4 \cdot 4 \cdot 0{,}96 = 15{,}36$.

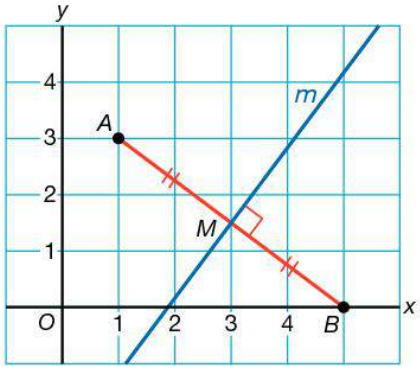
$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$

14.2 Lijnen en cirkels

O 19 In figuur 14.28 zie je het lijnstuk AB met de middelloodlijn m. De middelloodlijn staat loodrecht op AB en gaat door het midden M van AB.

Gegeven zijn de punten $A(1, 3)$ en $B(5, 0)$. Voor de middelloodlijn m van het lijnstuk AB geldt $\vec{n}_m = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ en m gaat door het punt $M\left(3, 1\frac{1}{2}\right)$.

a Licht dit toe en stel een vergelijking op van m.



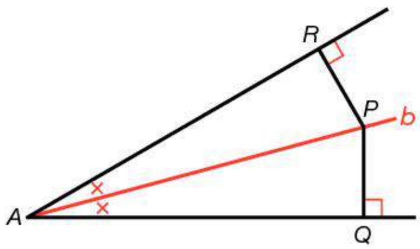
figuur 14.28

In figuur 14.29 is hoek A getekend met de bissectrice b. Ook is een punt P op b getekend. De punten Q en R liggen op de benen van de hoek zo, dat

$\angle AQP = \angle ARP = 90°$. Uit $\sin(\angle PAQ) = \dfrac{PQ}{AP}$ en

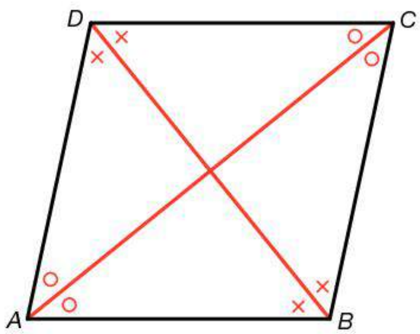
$\sin(\angle PAR) = \dfrac{PR}{AP}$ volgt dat $PQ = PR$.

b Licht dit toe.



figuur 14.29 De bissectrice b deelt hoek A middendoor.

In een ruit delen de diagonalen de hoeken middendoor, dus in de figuur hiernaast is AC de bissectrice van $\angle BAD$.



figuur 14.30 Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden.

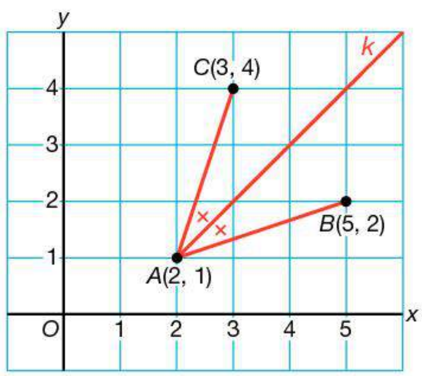
Gegeven zijn de punten $A(2, 1)$, $B(5, 2)$ en $C(3, 4)$ en de bissectrice k van $\angle BAC$. Zie figuur 14.31. Er geldt

$\vec{r}_k = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c Licht dit toe en stel een vectorvoorstelling op van k.

Verder is gegeven het punt $D(8, 3)$.

d Licht toe dat k ook de bissectrice is van $\angle DAC$ en dat geldt $\vec{r}_k = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.

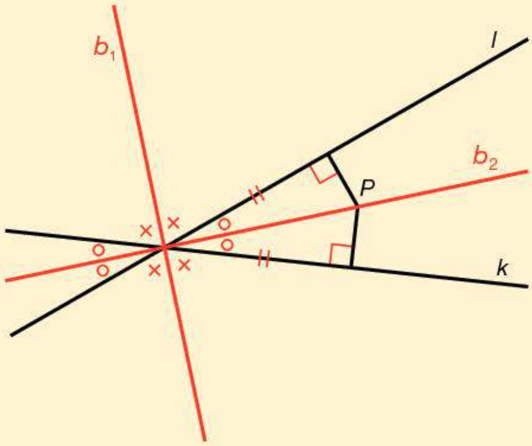


figuur 14.31

Theorie A Bissectrices en middelloodlijnen

De *bissectrice* van een hoek is de halve lijn die de hoek middendoor deelt.
Bij twee snijdende lijnen vormen de bissectrices twee lijnen die loodrecht op elkaar staan, het **bissectricepaar**.

Zo zijn in de figuur hiernaast de lijnen b_1 en b_2 de bissectrices van de lijnen k en l. Voor elk punt P op b_1 of b_2 geldt dat $d(P, k) = d(P, l)$.



figuur 14.32

Voor de afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn k: $ax + by = c$

gebruik je de formule $d(P, k) = \dfrac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
Zie het voorbeeld op de volgende bladzijde.

In dat voorbeeld stel je ook een formule op van de middelloodlijn l van het lijnstuk AC. Je gebruikt
- l staat loodrecht op AC
- l gaat door het midden M van AC.

Om bij gegeven punten A, B en C een richtingsvector te berekenen van de bissectrice k van $\angle ABC$ gebruik je de vectoren $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{BC}$.
Als deze vectoren even lang zijn, dan is $\vec{r}_k = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Dit volgt uit de eigenschap dat in een ruit de diagonalen de hoeken middendoor delen. Als niet geldt $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}|$ dan vermenigvuldig je de vectoren met positieve getallen zo, dat de lengten wel aan elkaar gelijk zijn.

Zijn gegeven de punten $A(0, 2)$, $B(3, 6)$ en $C(8, -6)$ en is k de bissectrice van $\angle ABC$, dan bereken je eerst $\overrightarrow{BA}$ en $\overrightarrow{BC}$. Je krijgt
$\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en

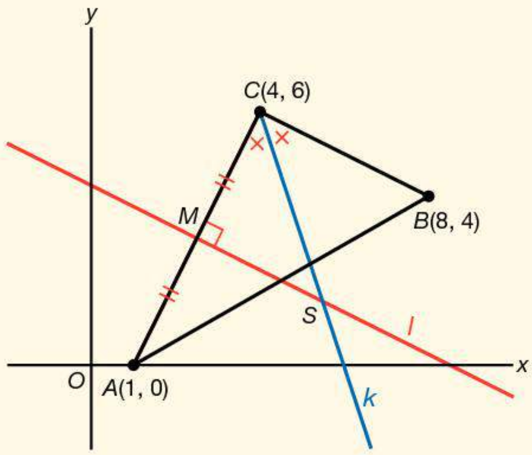
$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Er geldt $|\overrightarrow{BA}| = 5$ en $|\overrightarrow{BC}| = 13$. Dus je krijgt

$\vec{r}_k = 13 \cdot \overrightarrow{BA} + 5 \cdot \overrightarrow{BC} = 13 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -112 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC met $A(1, 0)$, $B(8, 4)$ en $C(4, 6)$. De bissectrice k van $\angle ACB$ snijdt de middelloodlijn l van zijde AC in het punt S.
Bereken de coördinaten van S.



figuur 14.33

Uitwerking

$\vec{r}_{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,

dus $\vec{n}_{AC} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ en AC: $2x - y = 2$.

$\vec{r}_{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, dus

$\vec{n}_{BC} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en BC: $x + 2y = 16$.

$P(x, y)$ op k en $d(P, AC) = d(P, BC)$ geeft $\dfrac{|2x - y - 2|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|x + 2y - 16|}{\sqrt{5}}$

dus $|2x - y - 2| = |x + 2y - 16|$

$2x - y - 2 = x + 2y - 16 \vee 2x - y - 2 = -x - 2y + 16$

$x - 3y = -14 \vee 3x + y = 18 \leftarrow$ $\boxed{\text{Alleen } 3x + y = 18 \text{ voldoet.}}$

Dus k: $3x + y = 18$.

$\vec{n}_l = \vec{r}_{AC} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en het midden van AC is $M\left(2\tfrac{1}{2}, 3\right)$, dus l: $x + 2y = 8\tfrac{1}{2}$.

k snijden met l.

$$\begin{cases} 3x + y = 18 \\ x + 2y = 8\tfrac{1}{2} \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ geeft } \begin{cases} 6x + 2y = 36 \\ x + 2y = 8\tfrac{1}{2} \end{cases} -$$

$$5x = 27\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5\tfrac{1}{2} \\ 3x + y = 18 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \cdot 5\tfrac{1}{2} + y = 18 \\ y = 1\tfrac{1}{2} \end{array}$$

Dus $S\left(5\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}\right)$.

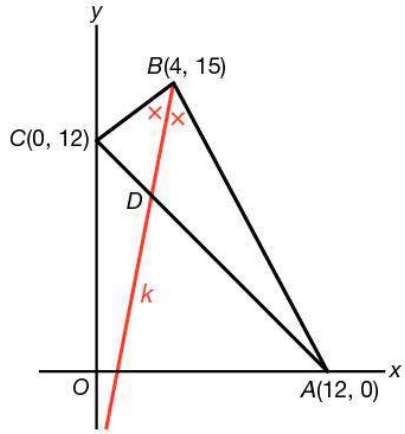
20 Gegeven zijn de lijnen k: $3x - 4y = 12$ en l: $5x + 12y = 48$.
Het bissectricepaar van k en l wordt gevormd door de lijnen m en n.
Lijn m snijdt de y-as in het punt A en lijn n snijdt de y-as in het punt B.

a Stel van m en n een vergelijking op.
b Bereken de afstand tussen A en B.

21 Gegeven is driehoek ABC met $A(12, 0)$, $B(4, 15)$ en $C(0, 12)$. De bissectrice k van hoek B snijdt de zijde AC in het punt D. Zie figuur 14.34.

a Stel een vectorvoorstelling op van k.

b Bereken exact de coördinaten van D.

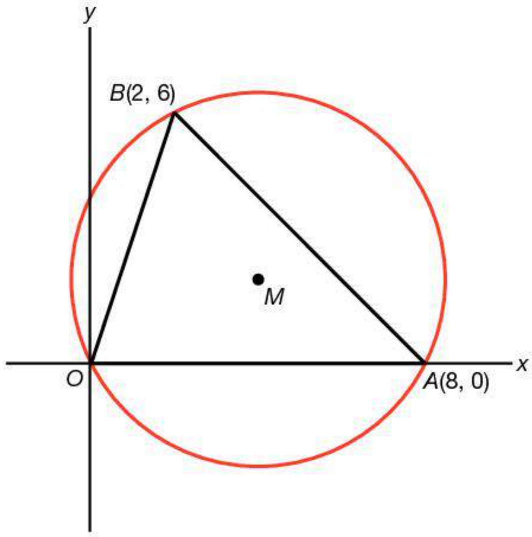


figuur 14.34

22 Het snijpunt van de drie middelloodlijnen van de zijden van een driehoek is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van de driehoek. Gegeven is $\triangle OAB$ met $A(8, 0)$ en $B(2, 6)$.

a Bereken de coördinaten van het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van de driehoek.

b Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van de driehoek.



figuur 14.35

D 23 Gegeven zijn de punten $A(3, 0)$, $B(7, 4)$, $C(5, 6)$ en $D(1, 4)$. Onderzoek met een berekening of de punten A, B, C en D op één cirkel liggen.

24 Gegeven zijn de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en

l_p: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$.

a Bereken voor welke p de lijnen elkaar snijden in het punt $(10, 13)$.

b Bereken voor welke p de lijnen loodrecht op elkaar staan.

c Neem $p = 2$ en bereken de hoek tussen k en l_p in graden nauwkeurig.

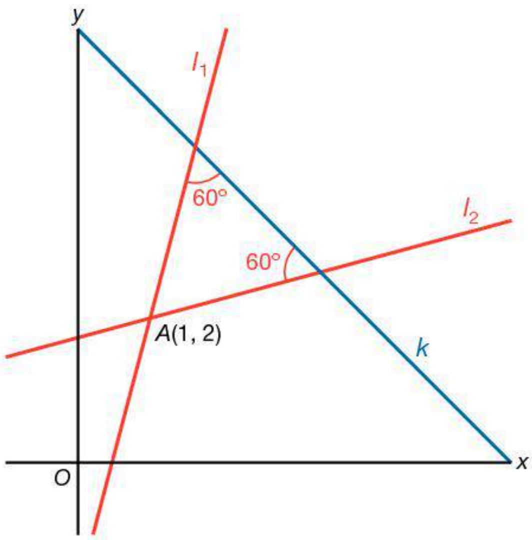
d Bereken exact voor welke p de hoek tussen de lijnen 45° is.

25 Gegeven is het punt $A(1, 2)$ en de lijn k: $x + y = 6$. De lijnen l_1 en l_2 gaan door A en snijden de lijn k onder een hoek van 60°. Zie figuur 14.36.
Om vectorvoorstellingen van de lijnen l op te stellen, neem je bijvoorbeeld
$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$.

Uit $\angle(k, l) = 60°$ en $\cos(\angle(k, l)) = \dfrac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}$

volgt dan dat $p^2 - 4p + 1 = 0$.

a Toon dit aan en bereken de waarden van p.
b Stel vectorvoorstellingen op van de lijnen l_1 en l_2.

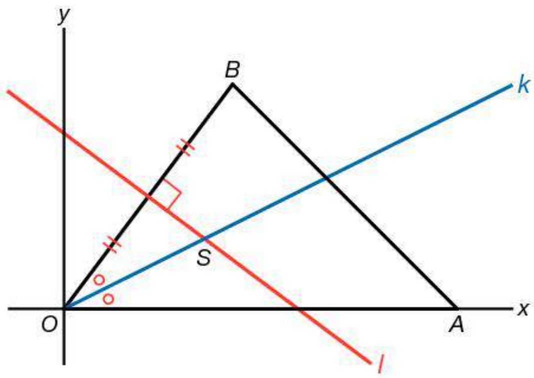


figuur 14.36

R 26 Gegeven is de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$. De lijnen l_1 en l_2 gaan door de oorsprong en snijden k onder een hoek van 60°.

a Stel $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ en bereken p.
b Stel $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}$ en bereken q.
c Teken de lijnen l die uit a en b volgen en licht toe waarom $\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$ niet beide richtingsvectoren oplevert.

A 27 Gegeven is driehoek OAB met $A(7, 0)$ en $B(3, 4)$. De bissectrice k van $\angle AOB$ snijdt de middelloodlijn l van zijde OB in het punt S. Zie figuur 14.37.
Stel vectorvoorstellingen op van de lijnen door S die de lijn door de punten A en B snijden onder een hoek van 30°.



figuur 14.37

O 28 Maak schetsen bij de volgende situaties. Twee cirkels hebben
- geen gemeenschappelijke raaklijnen
- één gemeenschappelijke raaklijn
- twee gemeenschappelijke raaklijnen
- drie gemeenschappelijke raaklijnen
- vier gemeenschappelijke raaklijnen.

Theorie B Cirkels, snijpunten en raaklijnen

Om de coördinaten van de snijpunten van de lijn

$k: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ met de cirkel $c: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ te berekenen, substitueer je $x = 1 + 2t$ en $y = 6 - t$ in de vergelijking van c. Je krijgt

$(1 + 2t)^2 + (6 - t)^2 - 8(1 + 2t) - 4(6 - t) + 10 = 0$

$1 + 4t + 4t^2 + 36 - 12t + t^2 - 8 - 16t - 24 + 4t + 10 = 0$

$5t^2 - 20t + 15 = 0$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$(t - 1)(t - 3) = 0$

$t = 1 \vee t = 3$

$t = 1$ geeft het snijpunt $(3, 5)$ en $t = 3$ geeft het snijpunt $(7, 3)$.

Om de coördinaten van de snijpunten van de cirkels $c_1: x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$ en $c_2: x^2 + y^2 = 10$ te berekenen, los je een stelsel op.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases} \quad -$$

$-8x - 4y + 20 = 0 \longleftarrow$ Dit is de vergelijking van de lijn door de snijpunten van de cirkels.

$-4y = 8x - 20$

$$\left.\begin{matrix} y = -2x + 5 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{matrix}\right\} x^2 + (-2x + 5)^2 = 10$$

$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 10$

$5x^2 - 20x + 15 = 0$

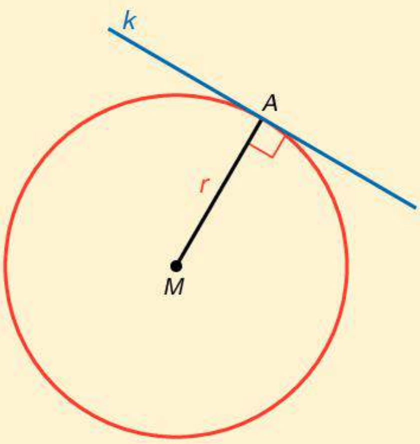
$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 1)(x - 3) = 0$

$x = 1 \vee x = 3$

$x = 1$ en $y = -2x + 5$ geeft het snijpunt $(1, 3)$.
$x = 3$ en $y = -2x + 5$ geeft het snijpunt $(3, -1)$.

Bij het oplossen van raakproblemen bij cirkels gebruik je de eigenschappen dat een raaklijn loodrecht staat op de straal naar het raakpunt en dat de afstand van het middelpunt van de cirkel tot de raaklijn gelijk is aan de lengte van de straal.



figuur 14.38 $k \perp MA$ en $d(M, k) = r$.

We onderscheiden vier raaklijnproblemen.

1 Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
- een cirkel
- een punt op de cirkel waar k de cirkel raakt.

2 Stel een vergelijking op van de cirkel c als gegeven is
- het middelpunt van c
- een lijn waaraan c raakt.

3 Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
- een cirkel waaraan k raakt
- de richting van k.

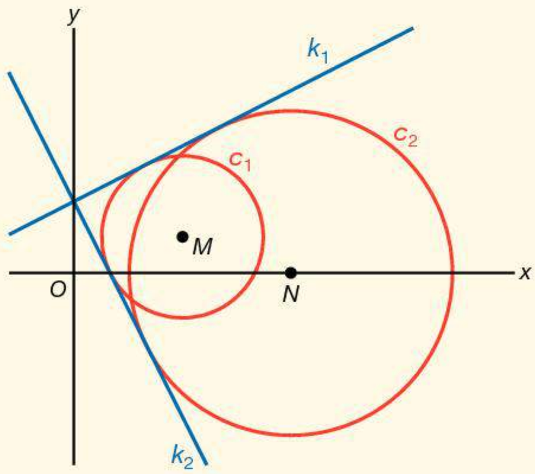
4 Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
- een cirkel waaraan k raakt
- een punt buiten de cirkel op k.

14

Bij de laatste drie raaklijnproblemen kun je de afstandsformule gebruiken.

Voorbeeld

Gegeven zijn de snijdende cirkels
c_1: $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ en c_2: $(x-6)^2+y^2=20$.
De lijnen k_1 en k_2 zijn de gemeenschappelijke raaklijnen van de cirkels. Zie figuur 14.39.
Stel van k_1 en van k_2 een vergelijking op.



figuur 14.39

Uitwerking
c_1 heeft middelpunt $M(3, 1)$ en straal $\sqrt{5}$.
c_2 heeft middelpunt $N(6, 0)$ en straal $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.
Stel k: $y=ax+b$ ofwel k: $ax-y+b=0$.

$d(M, k)=\sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|3a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5}$, dus $|3a-1+b|=\sqrt{5a^2+5}$.

$d(N, k)=2\sqrt{5}$ geeft $\dfrac{|6a+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2\sqrt{5}$, dus $|6a+b|=2\sqrt{5a^2+5}$.

Hieruit volgt $|3a-1+b|=\frac{1}{2}|6a+b|$

$$3a-1+b=3a+\tfrac{1}{2}b \vee 3a-1+b=-3a-\tfrac{1}{2}b$$
$$\tfrac{1}{2}b=1 \vee 6a+1\tfrac{1}{2}b=1$$
$$b=2 \vee b=-4a+\tfrac{2}{3}$$

$b=2$ invullen in $|3a-1+b|=\sqrt{5a^2+5}$ geeft $|3a+1|=\sqrt{5a^2+5}$
$$9a^2+6a+1=5a^2+5$$
$$4a^2+6a-4=0$$
$$2a^2+3a-2=0$$
$$D=3^2-4\cdot 2\cdot -2=25$$
$$a=\frac{-3-5}{4}=-2 \vee a=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$$

Dus k_1: $y=-2x+2$ en k_2: $y=\frac{1}{2}x+2$.

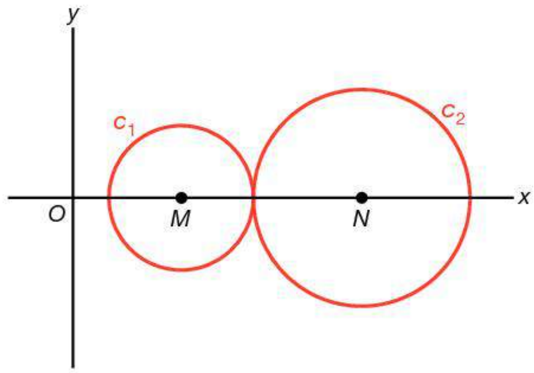
Hiermee zijn de twee lijnen gevonden, dus $b=-4a+\frac{2}{3}$ voldoet niet.

R 29 Zie het voorbeeld.

a Je kunt ook met een berekening aantonen dat $b = -4a + \frac{2}{3}$ niet voldoet.
Doe dit.

b De lijn is k: $y = ax + b$ gesteld. Hiermee sluit je één mogelijke richting van k uit.
Welke richting is dit?

30 Gegeven zijn de cirkels c_1: $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ en c_2: $(x - 8)^2 + y^2 = 9$. Zie figuur 14.40. De cirkels hebben drie gemeenschappelijke raaklijnen.
Stel van elk van deze lijnen een vergelijking op.



figuur 14.40

31 Gegeven zijn nog eens de cirkels van opgave 30.
Er is een cirkel waarvan het middelpunt op de positieve y-as ligt en die raakt aan beide cirkels.
Stel het middelpunt van deze cirkel is $P(0, p)$ en de straal is r. Dan geldt $p^2 + 9 = (r + 2)^2$ en $p^2 + 64 = (r + 3)^2$.

a Toon dit aan.

b Bereken p en r.

Er zijn twee cirkels waarvan de middelpunten op de lijn $x = 3$ liggen die de cirkels c_1 en c_2 raken.

c Stel een vergelijking op van deze cirkels.

32 In deze opgave oefen je nog eens met de vier raaklijnproblemen die in de theorie worden genoemd.
De lijn k: $y = -2x + 5$ raakt de cirkel c met middelpunt $M(4, 2)$.

a Stel een vergelijking op van c.

b Het punt $A(5, 4)$ ligt op c. De lijn l raakt c in A.
Stel een vergelijking op van l.

c Stel een vergelijking op van de lijnen m_1 en m_2 met richtingscoëfficiënt 2 die c raken.

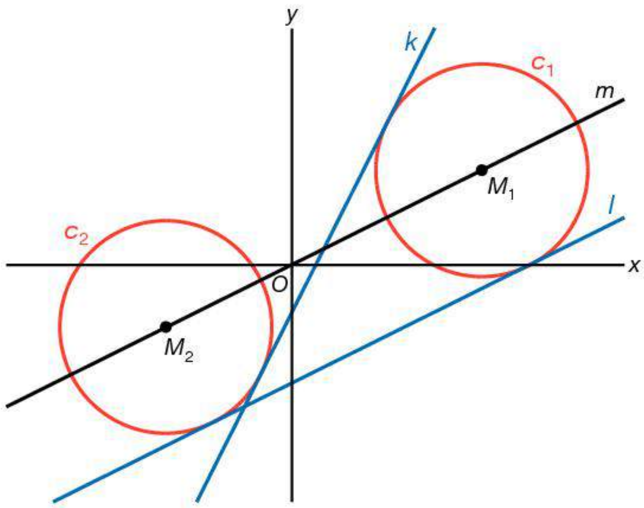
d Stel een vergelijking op van de lijnen n_1 en n_2 door het punt $B\left(0, 2\frac{1}{2}\right)$ die c raken.

33 Gegeven zijn de lijnen k: $2x - y = 1$, l: $x - 2y = 5$ en m: $x - 2y = 0$. Er zijn twee cirkels c_1 en c_2 waarvan de middelpunten op de lijn m liggen en die de lijnen k en l raken. Omdat het middelpunt van zo'n cirkel op de lijn m: $x - 2y = 0$ ligt, stellen we het middelpunt $M(2p, p)$.

a Licht deze keuze toe.

b Gebruik dat voor het punt M geldt dat $d(M, k) = d(M, l)$ om p te berekenen.

c Stel van c_1 en c_2 een vergelijking op.



figuur 14.41

R 34 Zie opgave 33.
Je kunt de coördinaten van de middelpunten M_1 en M_2 van de cirkels c_1 en c_2 ook vinden door de bissectrices van de lijnen k en l te snijden met de lijn m.
Licht dit toe.

35 Gegeven zijn de lijnen k: $3x - y = 0$, l: $x - 3y = -8$ en m: $x - 2y = -4$. De middelpunten van de cirkels c_1 en c_2 liggen op de lijn m en de cirkels raken de lijnen k en l.
Stel van c_1 en c_2 een vergelijking op.

36 Gegeven zijn de cirkels c_1: $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ en c_2: $x^2 + y^2 - 14x + 24 = 0$. De cirkels snijden elkaar in de punten A en B. Zie figuur 14.42.

a Bereken de coördinaten van A en B.

De lijnen k in figuur 14.42 gaan door A.
Een vergelijking van k is
k: $y = ax + 3 - 3a$.

b Toon dit aan.

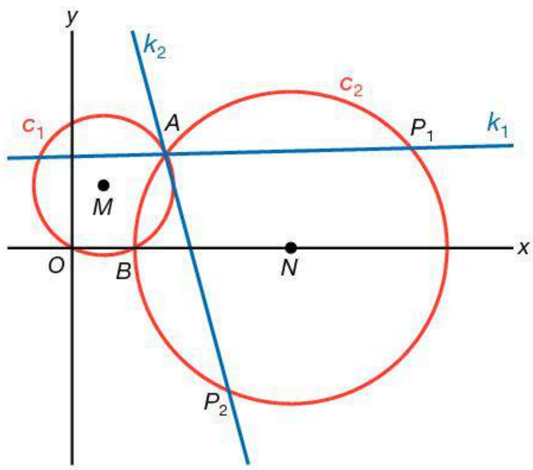
De lijnen k snijden de cirkel c_2 in de punten P zo, dat $AP = 5\sqrt{2}$. Hieruit volgt $d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Hierbij is N het middelpunt van c_2.

c Toon dit aan.

Uit $d(N, k) = 2\frac{1}{2}\sqrt{2}$ volgt $a = -7 \vee a = \frac{1}{7}$.

d Toon dit aan.

e Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2.



figuur 14.42

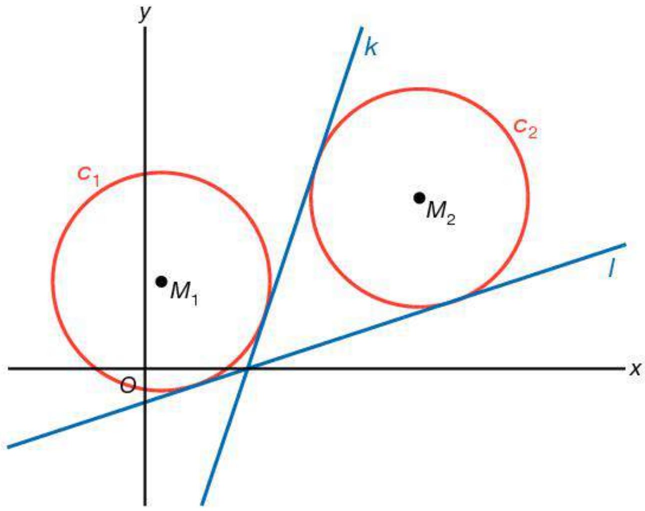
R 37 Zie opgave 36.
Je kunt de coördinaten van P_1 en P_2 vinden door c_2 te snijden met een cirkel c_3.
Geef een vergelijking van c_3.

A 38 In figuur 14.43 zijn de lijnen k: $3x - y = 9$ en l: $x - 3y = 3$ getekend en twee cirkels met straal $\sqrt{10}$ die zowel k als l raken.

a Stel vergelijkingen op van deze cirkels.

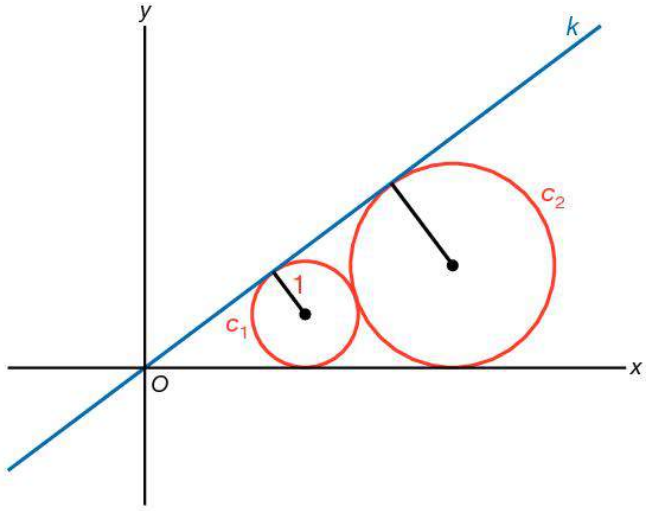
De cirkel c_3 met middelpunt $P(0, 1)$ snijdt van de lijn k een lijnstuk af met lengte $2\sqrt{10}$.

b Stel van c_3 een vergelijking op.



figuur 14.43

D 39 Gegeven is de lijn k: $3x - 4y = 0$. Cirkel c_1 heeft straal 1 en raakt de x-as en de lijn k zoals in figuur 14.44. Cirkel c_2 raakt de x-as, de lijn k en c_1 zoals in figuur 14.44.
Bereken exact de straal van c_2.



figuur 14.44

Terugblik

Lijnen en hoeken

Om te berekenen welke lijnen door het punt $A(5, 1)$ een hoek van 45° maken met de lijn k: $x - 2y = -2$ stel je deze lijnen

l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$. Uit $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ volgt $\vec{r}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en omdat

$\cos(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ krijg je $\dfrac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{p^2 + 1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dit geeft $|2p + 1| = \frac{1}{2}\sqrt{10p^2 + 10}$.
Oplossen van deze vergelijking geeft $p = -3 \vee p = \frac{1}{3}$.

De lijnen l zijn l_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en l_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

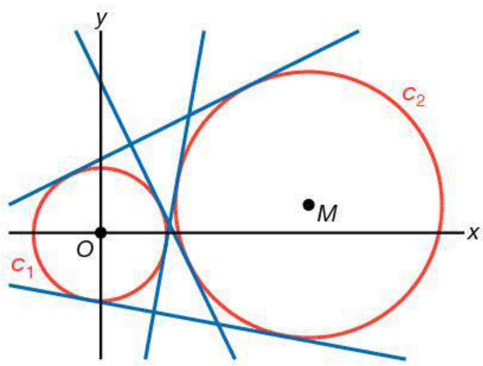
Cirkels en raaklijnen

Bij het oplossen van raaklijnproblemen bij cirkels gebruik je
- een raaklijn staat loodrecht op de straal naar het raakpunt
- de afstand van het middelpunt van de cirkel tot de raaklijn is gelijk aan de lengte van de straal van de cirkel.

Gebruik je de laatste eigenschap, dan heb je te maken met de afstandsformule. De afstand van het punt $P(x_P, y_P)$ tot de lijn

k: $ax + by = c$ is $d(P, k) = \dfrac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

De cirkels c_1: $x^2 + y^2 = 5$ en c_2: $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 20$ hebben vier gemeenschappelijke raaklijnen. Zie de figuur hiernaast.



Om vergelijkingen van deze lijnen op te stellen ga je uit van k: $y = ax + b$ ofwel k: $ax - y + b = 0$.

$d(O, k) = r_1$ geeft $|b| = \sqrt{5a^2 + 5}$ en

$d(M, k) = r_2$ geeft $|7a - 1 + b| = 2\sqrt{5a^2 + 5}$.

Hieruit volgt $|7a - 1 + b| = 2|b|$.

Je krijgt $b = 7a - 1 \vee b = -2\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}$.

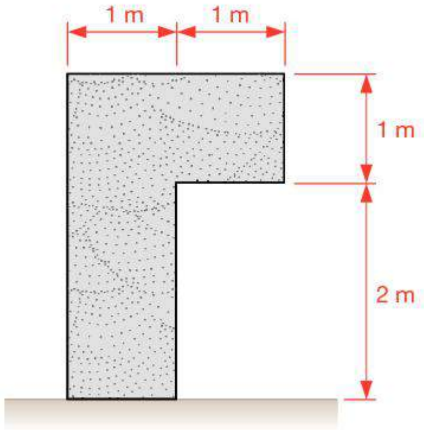
Deze waarden van b invullen in $|b| = \sqrt{5a^2 + 5}$ geeft

$a = -\frac{2}{11} \vee a = \frac{1}{2} \vee a = -2 \vee a = 5\frac{1}{2}$.
Zo krijg je de vergelijkingen

k_1: $y = -\frac{2}{11}x - 2\frac{3}{11}$, k_2: $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, k_3: $y = -2x + 5$ en k_4: $y = 5\frac{1}{2}x - 12\frac{1}{2}$.

14.3 Zwaartepunten

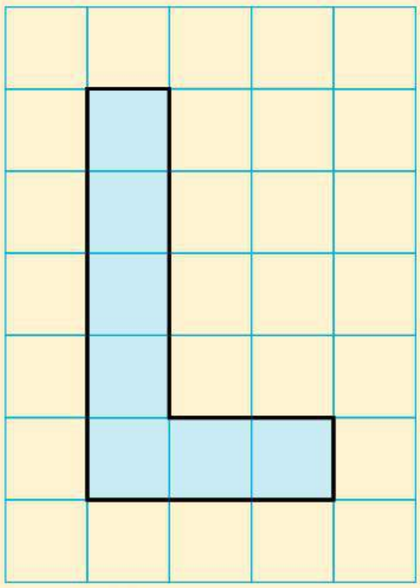
O 40 In figuur 14.45 zie je het vooraanzicht van een betonnen L-vorm die overal even dik is. De afmetingen staan in de figuur.
Wat denk je, blijft deze L-vorm staan?



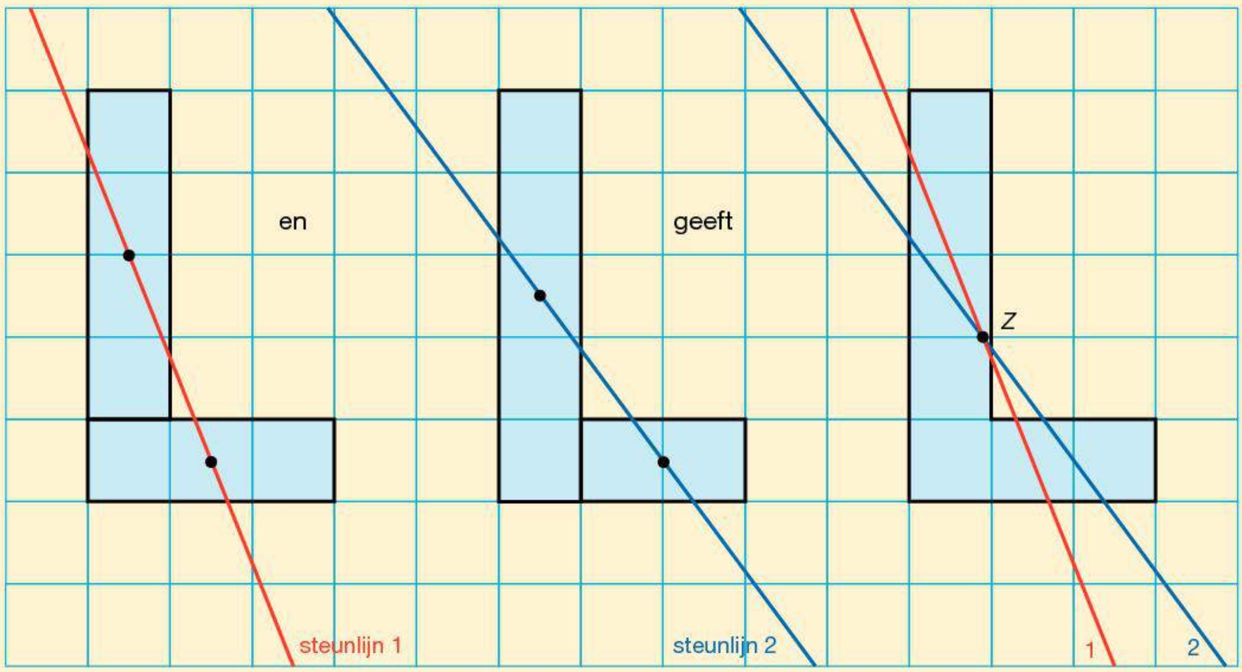
figuur 14.45

Theorie A Steunlijnen en zwaartepunten

We bekijken vlakke *massieve homogene* vormen. Daarmee bedoelen we dat de massa over de hele vorm gelijkmatig verdeeld is. In figuur 14.46 zie je zo'n vorm. Om het **zwaartepunt** hiervan te vinden gebruiken we twee **steunlijnen**. We splitsen de vorm op in twee stukken en bepalen van elk stuk het zwaartepunt. De lijn door deze twee zwaartepunten is een steunlijn. Zou je deze vorm ondersteunen langs deze lijn, dan blijft deze in evenwicht. Daarna splitsen we de vorm op in twee andere stukken en tekenen hierbij weer een steunlijn. Het snijpunt van deze twee steunlijnen is het zwaartepunt van de vorm. Bij de vorm van figuur 14.46 krijg je figuur 14.47.



figuur 14.46

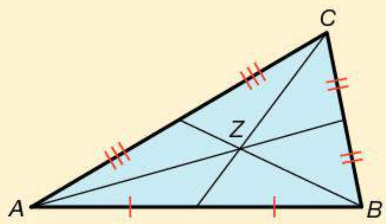


figuur 14.47 Het zwaartepunt van de L-vorm is Z.

Hierbij zijn de volgende principes gebruikt.

- Alle steunlijnen gaan door één punt, het steunpunt.
  Elke lijn door het steunpunt is een steunlijn.
  Het steunpunt is het zwaartepunt van de vorm.
- Als een vorm bestaat uit twee stukken met zwaartepunten Z_1 en Z_2, dan ligt het zwaartepunt op het verbindingslijnstuk van Z_1 en Z_2.

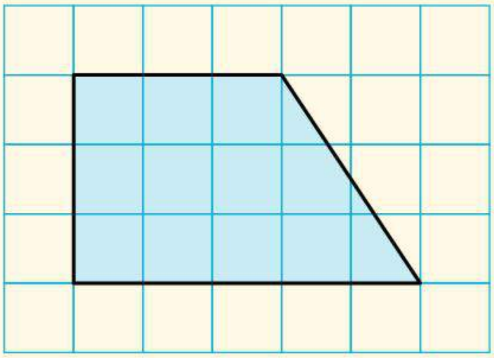
Verder hebben we gebruikt dat het zwaartepunt van een rechthoekige vorm op het symmetriepunt hiervan ligt. Als een vorm een symmetrie-as heeft, dan ligt het zwaartepunt op deze symmetrie-as.
In het voorbeeld wordt gebruikt dat het zwaartepunt van een driehoek het snijpunt is van de zwaartelijnen van de driehoek.



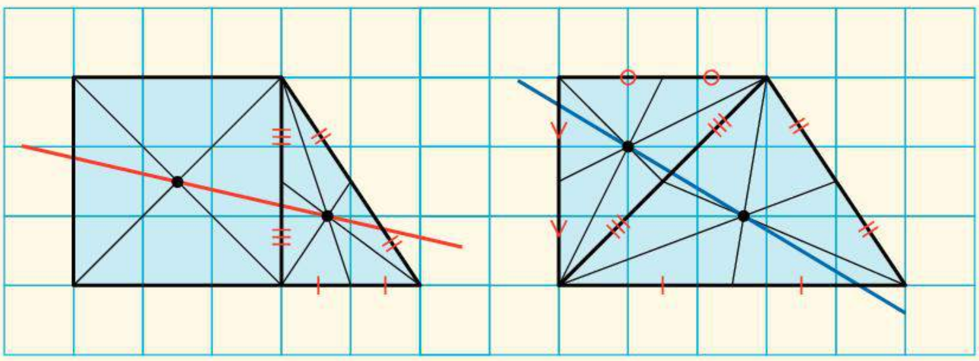
Het zwaartepunt is het snijpunt van de zwaartelijnen.

Voorbeeld

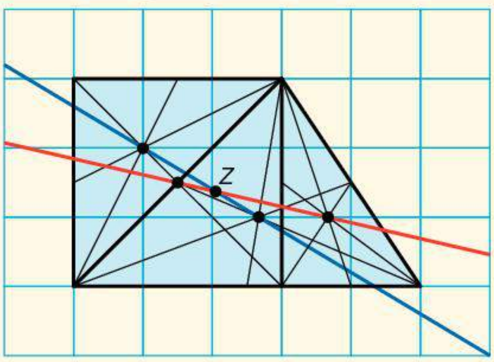
Teken het zwaartepunt de van massieve homogene vorm in figuur 14.48.


figuur 14.48

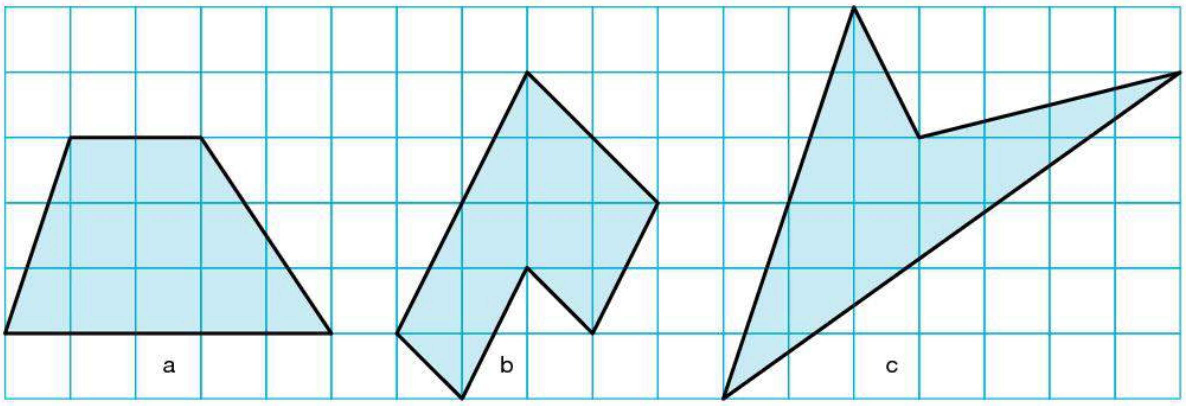
Aanpak
Verdeel de vorm op twee manieren in twee stukken waarvan je het zwaartepunt kunt tekenen.



Uitwerking

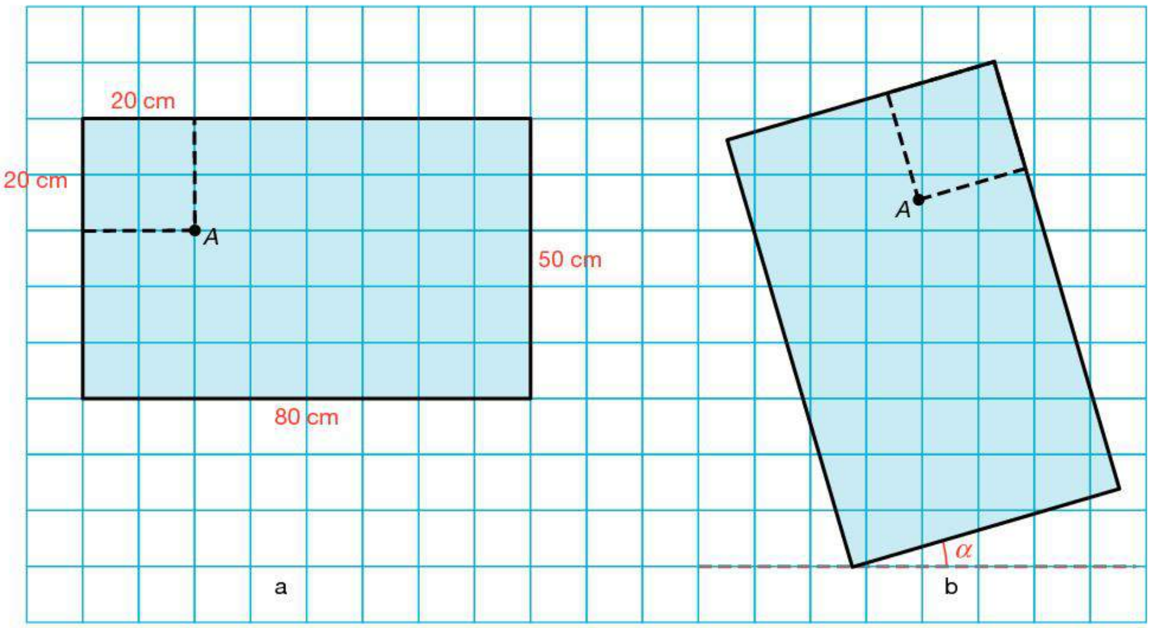


41 [▶ WERKBLAD] Teken het zwaartepunt van de massieve homogene vormen in figuur 14.49.



figuur 14.49

A 42 De massieve homogene plaat in figuur 14.50a is 80 cm bij 50 cm. De plaat wordt opgehangen bij punt A. Daardoor komt de plaat scheef te hangen. Zie figuur 14.50b. De hoek van de kortste rand met een horizontale lijn noemen we α.
Bereken α in graden nauwkeurig.



figuur 14.50

O 43 In figuur 14.51 zijn de puntmassa's A en B getekend. A is 2 kg, B is 3 kg en de afstand tussen A en B is 10 cm. Het zwaartepunt van het systeem met A en B ligt niet precies midden tussen A en B.
Wat denk je, ligt het zwaartepunt dichter bij A of bij B?

figuur 14.51

Theorie B De momentenstelling

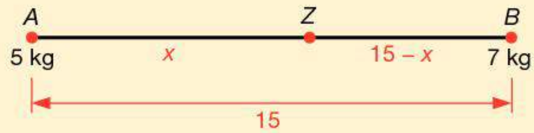
Om de plaats van het zwaartepunt in opgave 43 te vinden gebruik je de **hefboomwet**. Zie figuur 14.52 met de puntmassa's A van m_1 kg en B van m_2 kg. Volgens de hefboomwet is er ten opzichte van het zwaartepunt evenwicht van momenten en daaruit volgt $m_1 \cdot x = m_2 \cdot y$.

figuur 14.52

Om in figuur 14.53 de plaats van het zwaartepunt Z van het systeem met de puntmassa's A en B te berekenen, stel je $AZ = x$. Dan is $BZ = 15 - x$.
De hefboomwet geeft $5 \cdot x = 7 \cdot (15 - x)$

$$\begin{aligned} 5x &= 105 - 7x \\ 12x &= 105 \\ x &= 8{,}75 \end{aligned}$$

Dus $AZ = 8{,}75$ en $BZ = 15 - 8{,}75 = 6{,}25$.

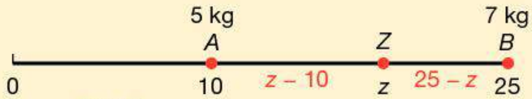


figuur 14.53

In figuur 14.54 is een getallenlijn getekend met nogmaals A, B en Z.
A bevindt zich 10 rechts van 0, B bevindt zich 25 rechts van 0 en Z bevindt zich z rechts van 0.
De hefboomwet geeft $5 \cdot (z - 10) = 7 \cdot (25 - z)$

$$\begin{aligned} 5z - 50 &= 175 - 7z \\ 12z &= 225 \\ z &= 18{,}75 \end{aligned}$$

Dus Z bevindt zich 18,75 rechts van 0.



figuur 14.54

Je kunt ook de positie van Z berekenen met momenten ten opzichte van 0. Het moment van Z ten opzichte van 0 moet gelijk zijn aan de som van de momenten van A en B ten opzichte van 0. Hierbij neem je de massa van Z gelijk aan de som van de massa's van A en B.
Je krijgt dan $12 \cdot z = 5 \cdot 10 + 7 \cdot 25$

$$z = \tfrac{1}{12}(5 \cdot 10 + 7 \cdot 25)$$

Dit is een toepassing van de **momentenstelling**.

In het algemeen geldt

De plaats van het zwaartepunt van de massa's $m_1, m_2, \ldots, m_n$ op de getallenlijn met de afstanden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tot 0 is te berekenen met

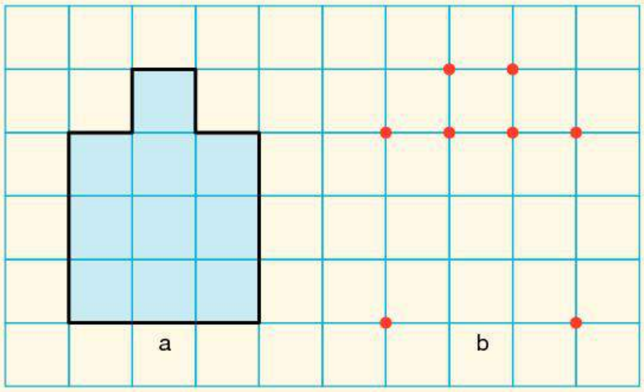
$$z = \frac{1}{M}(m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + \ldots + m_n \cdot a_n).$$

Hierbij is $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

In opgave 45 toon je deze regel aan voor $n = 2$ en $n = 3$.
Een massieve homogene massa kun je opvatten als een puntmassa in het zwaartepunt. Zie voorbeeld a.
Ook kun je puntmassa's samennemen tot één puntmassa. Zie voorbeeld b.

Voorbeeld

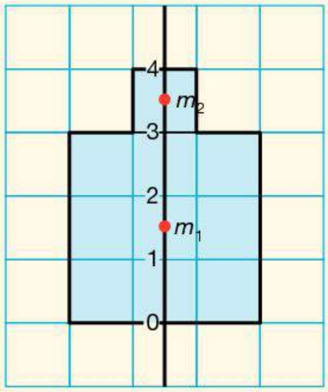
In figuur 14.55a zie je een vorm die is opgebouwd uit massieve homogene vierkanten. De vorm in figuur 14.55b is opgebouwd uit twee keer vier even zware puntmassa's die op de hoekpunten van vierkanten liggen.
Bereken de plaats van het zwaartepunt van
a figuur a
b figuur b.



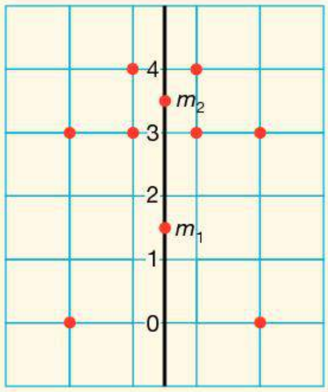
figuur 14.55

Aanpak
Teken een verticale getallenlijn met 0 in het midden van de onderste zijde van het grote vierkant.

Uitwerking

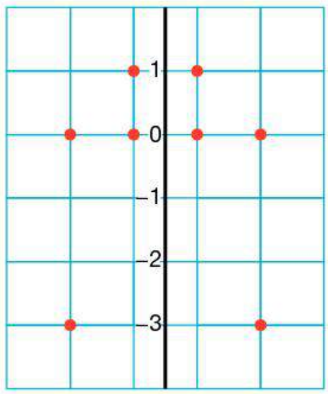


a Het zwaartepunt ligt op de symmetrieas.
Zie de figuur hiernaast.
$m_1 = 3 \cdot 3 = 9$ en $m_2 = 1 \cdot 1 = 1$
$z = \dfrac{1}{9+1}\left(9 \cdot 1\tfrac{1}{2} + 1 \cdot 3\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{10} \cdot 17 = 1{,}7$
Dus het zwaartepunt ligt 1,7 boven 0.



b Het zwaartepunt ligt op de symmetrieas.
Zie de figuur hiernaast.
$m_1 = 4 \cdot 1 = 4$ en $m_2 = 4 \cdot 1 = 4$
$z = \dfrac{1}{4+4}\left(4 \cdot 1\tfrac{1}{2} + 4 \cdot 3\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \cdot 20 = 2{,}5$
Dus het zwaartepunt ligt 2,5 boven 0.

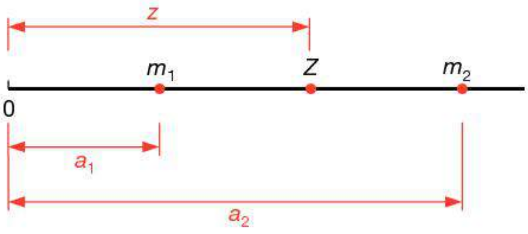
R 44 Zie voorbeeld b.
Gerrit neemt de getallenlijn zoals in de figuur hiernaast.
Welke berekening van de plaats van het zwaartepunt hoort hierbij?



figuur 14.56

45 In figuur 14.57 zie je de massa's m_1 en m_2. Het zwaartepunt van de massa's is Z. Er is een getallenlijn getekend met de afstanden a_1 en a_2. Voor het berekenen van de afstand z van Z tot 0 geldt $z = \frac{1}{M}(m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2)$ met $M = m_1 + m_2$.

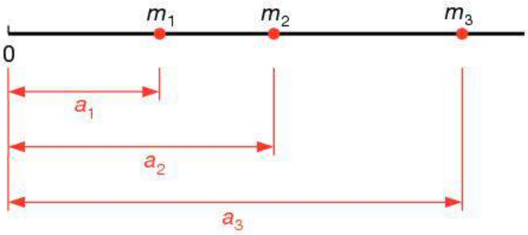
a Toon dit aan met behulp van de hefboomwet.



figuur 14.57

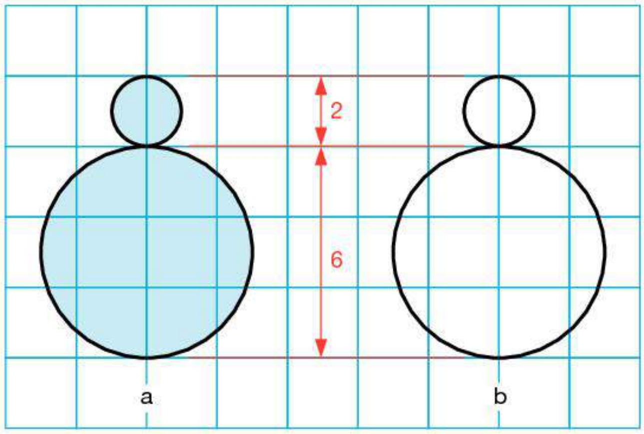
In figuur 14.58 zie je de massa's m_1, m_2 en m_3.

b Toon aan dat voor de afstand z van het zwaartepunt Z tot 0 geldt
$z = \frac{1}{M}(m_1 \cdot a_1 + m_2 \cdot a_2 + m_3 \cdot a_3)$ met
$M = m_1 + m_2 + m_3$.



figuur 14.58

46 In figuur 14.59a zie je een vorm die is opgebouwd uit massieve homogene cirkels. In figuur 14.59b zie je een vorm die is opgebouwd uit homogene cirkelvormige staven.
Bereken de plaats van het zwaartepunt van beide vormen.



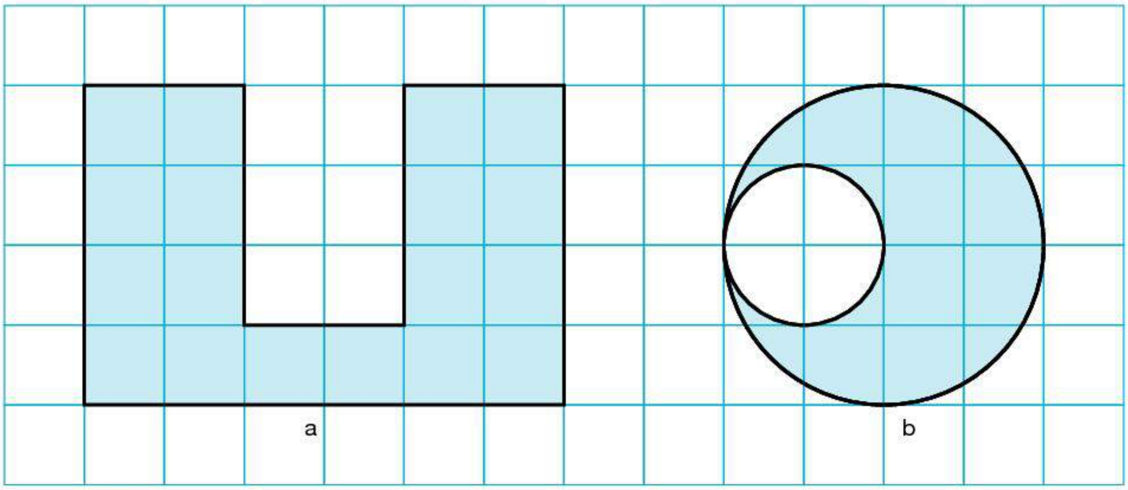
figuur 14.59

47 In deze opgave bereken je waar het zwaartepunt van het systeem met Aarde en Maan zich bevindt.

figuur 14.60 Het systeem Aarde-Maan.

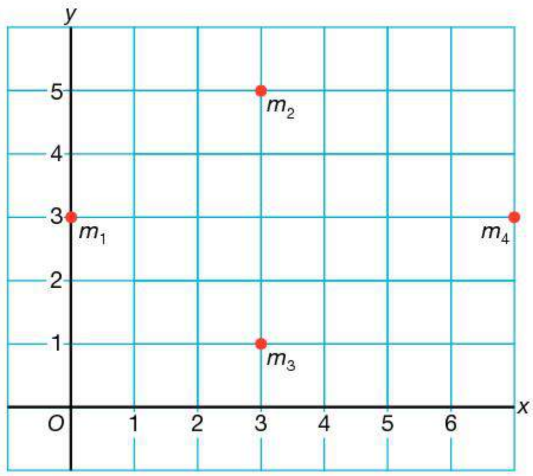
Gebruik de volgende gegevens.
Aarde: massa $5{,}975 \cdot 10^{24}$ kg, straal 6371 km.
Maan: massa $7{,}343 \cdot 10^{22}$ kg, straal 1738 km.
Afstand Aarde-Maan is 384 400 km van middelpunt tot middelpunt.
Bereken waar het zwaartepunt zich bevindt ten opzichte van het oppervlak van de aarde.

A 48 Bereken exact de plaats van het zwaartepunt bij de massieve homogene vormen in figuur 14.61.



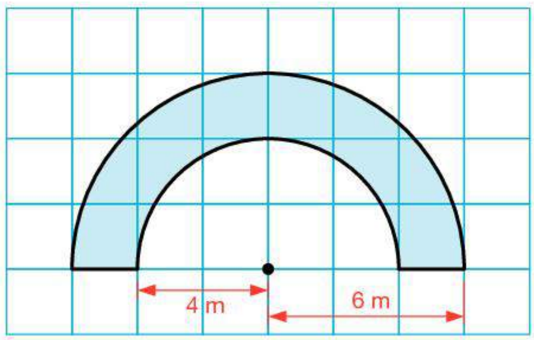
figuur 14.61

A 49 In figuur 14.62 zijn de massa's m_1, m_2, m_3 en m_4 in een assenstelsel getekend. Er geldt $m_1 = 4$, $m_2 = 6$, $m_3 = 2$ en $m_4 = 3$.
Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt Z van deze vier puntmassa's.



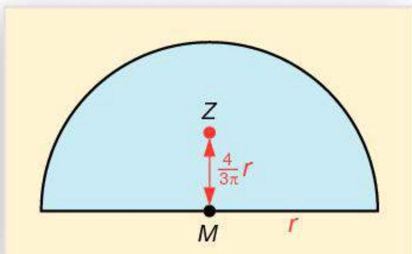
figuur 14.62

D 50 De massieve homogene boog in figuur 14.63 heeft de vorm van een halve cirkel. De binnendiameter is 4 meter en de buitendiameter is 6 meter.
Bereken in cm nauwkeurig de plaats van het zwaartepunt van deze boog.
Gebruik hierbij de stelling hieronder.



figuur 14.63

Het zwaartepunt van een halve cirkelschijf met straal r ligt $\frac{4}{3\pi}r$ boven het middelpunt.

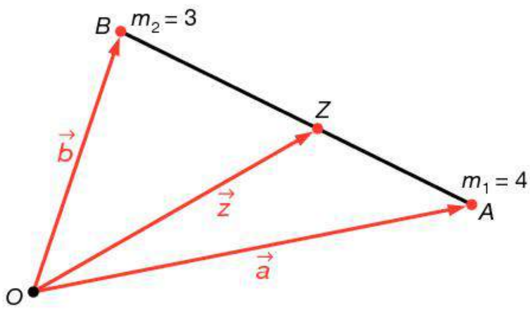


O 51 Zie figuur 14.64. In punt A ligt een massa van 4 en in punt B ligt een massa van 3. Het zwaartepunt van beide massa's samen ligt in punt Z. Er geldt $AZ : BZ = 3 : 4$.

a Licht dit toe.

Er geldt dus $\vec{z} = \vec{a} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{a})$.

b Licht dit toe en herleid $\vec{z} = \vec{a} + \frac{3}{7}(\vec{b} - \vec{a})$ tot $\vec{z} = \frac{1}{7}(4\vec{a} + 3\vec{b})$.



figuur 14.64

Theorie C Vectoren en zwaartepunten

In figuur 14.65 ligt in punt A een massa m_1 en in punt B een massa m_2. Hieruit volgt dat het zwaartepunt Z zo tussen A en B ligt dat geldt $AZ : BZ = m_2 : m_1$.

Dus

$$\vec{z} = \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

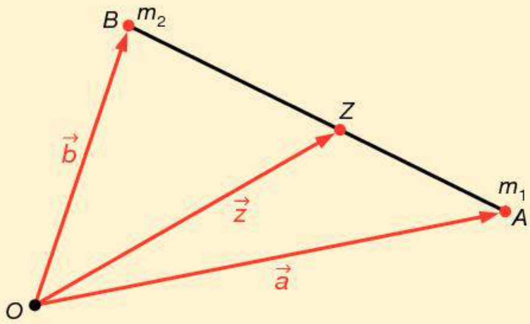
$$\vec{z} = \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{b} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{z} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) \cdot \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{z} = \frac{m_1 + m_2 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{z} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{a} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{z} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b})$$



figuur 14.65

En zo geldt voor het zwaartepunt Z van de massa's m_1, m_2 en m_3 in respectievelijk de punten A, B en C dat

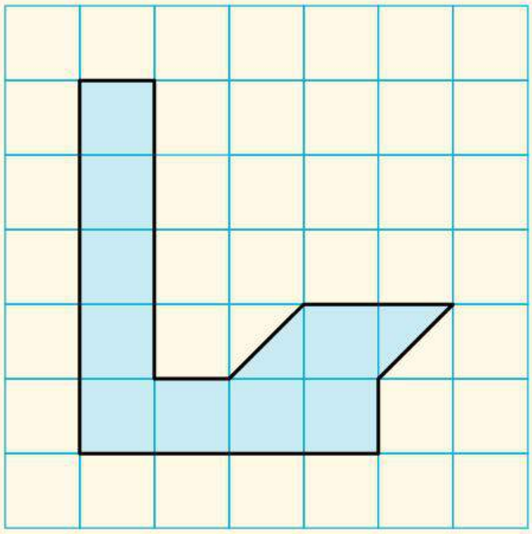
$$\vec{z} = \frac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c}) \text{ met } M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Je toont dit aan in opgave 52.

Voor het zwaartepunt Z van de massa's $m_1, m_2, \ldots, m_n$ in de punten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ geldt $\vec{z} = \frac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a_1} + m_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + m_n \cdot \vec{a_n})$ met $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Voorbeeld

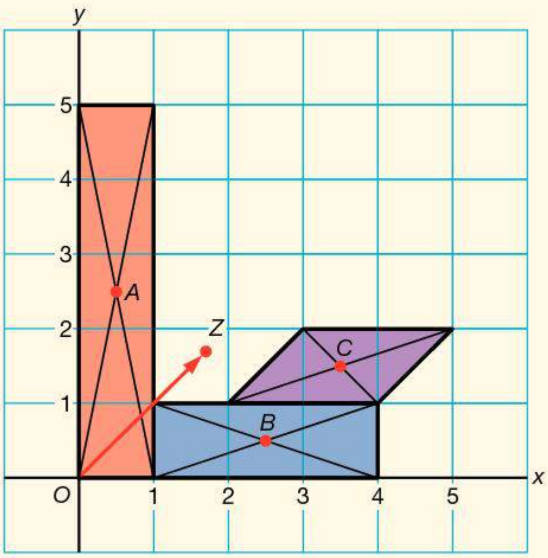
Gegeven is de massieve, homogene vorm in figuur 14.66.
Teken de plaats van het zwaartepunt met behulp van vectoren.



figuur 14.66

Aanpak
Splits de vorm op in een aantal stukken en teken een assenstelsel.

Uitwerking
A heeft massa 5.
B heeft massa 3.
C heeft massa 2.
De totale massa is 5 + 3 + 2 = 10.



$$\vec{z} = \tfrac{1}{10}\left(5 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}\right) = \tfrac{1}{10}\left(5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \tfrac{1}{10}\left(\begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 12\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1{,}7 \\ 1{,}7 \end{pmatrix}$$

52 In de theorie is aangetoond dat voor het zwaartepunt van de massa's m_1 en m_2 in de punten A en B geldt

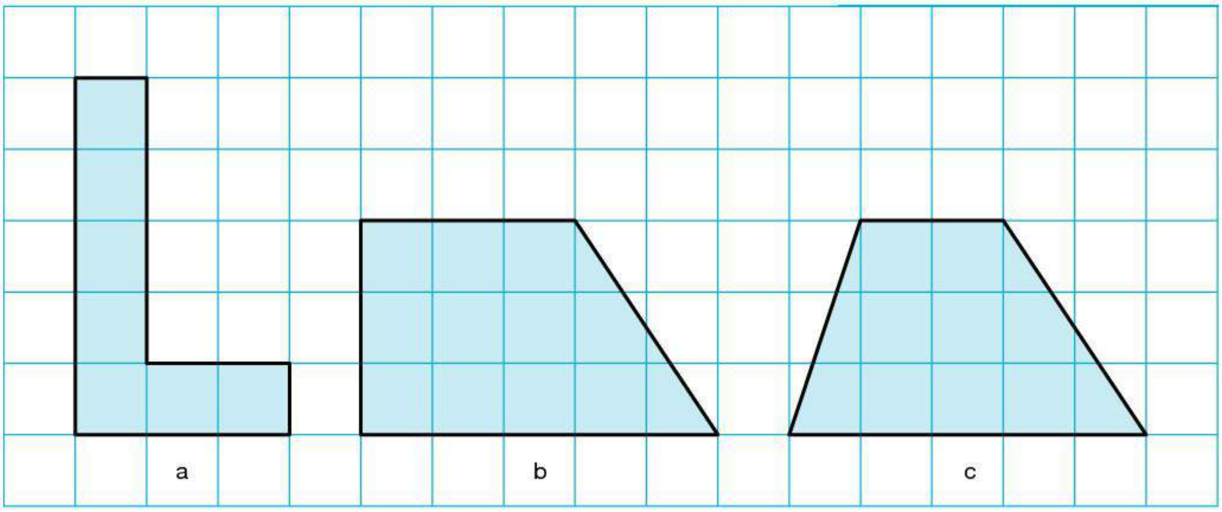
$$\vec{z} = \frac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b}), \text{ met } M = m_1 + m_2.$$

Gebruik dit om aan te tonen dat voor het zwaartepunt van de massa's m_1, m_2 en m_3 in de punten A, B en C geldt

$$\vec{z} = \frac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b} + m_3 \cdot \vec{c}), \text{ met } M = m_1 + m_2 + m_3.$$

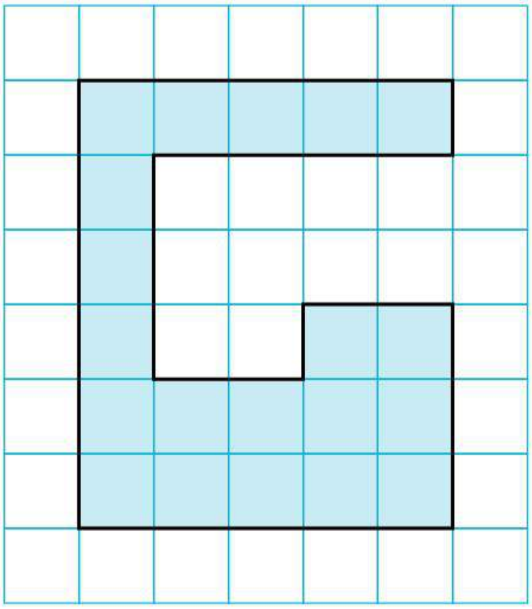
53 In figuur 14.67 zie je enkele vormen waarvan in het begin van deze paragraaf het zwaartepunt is getekend met behulp van steunlijnen. Teken bij elke vorm de plaats van het zwaartepunt met behulp van vectoren.

Bij een homogene driehoek met de hoekpunten A, B en C geldt voor het zwaartepunt Z dat $\vec{z} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.



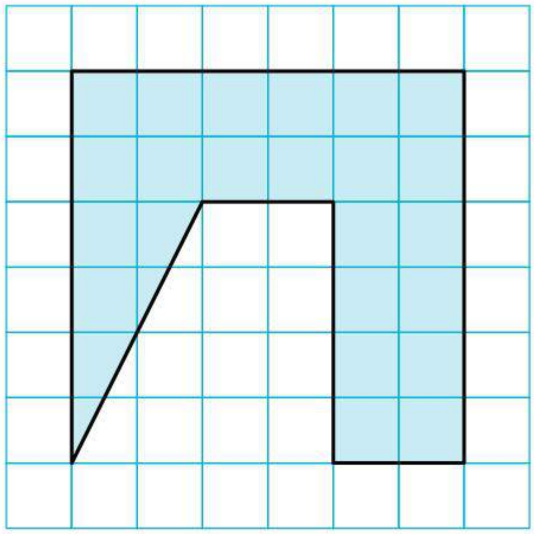
figuur 14.67

A 54 Teken de plaats van het zwaartepunt van de vorm in figuur 14.68 met behulp van vectoren.



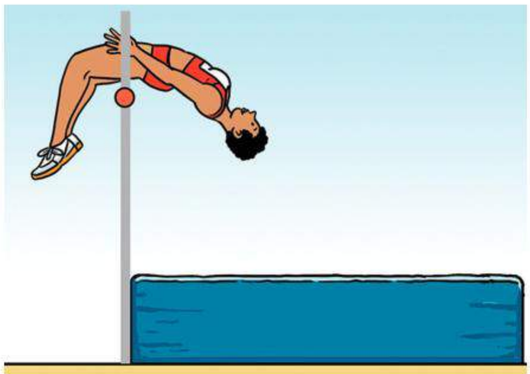
figuur 14.68

A 55 De vorm in figuur 14.69 is ontstaan door uit een vierkant met zijde 6 een stuk weg te laten.
Teken de plaats van het zwaartepunt met behulp van vectoren.



figuur 14.69

56 [▶ WERKBLAD] Bij de Fosbury Flop (zie bladzijde 46) springt een atleet zo over de lat, dat het zwaartepunt van het lichaam zo laag mogelijk blijft.
De figuur hiernaast staat vergroot op het werkblad.
Gebruik de figuur op het werkblad om de plaats van het zwaartepunt te tekenen. Deel daartoe de figuur op in een aantal stukken en maak van elk stuk een schatting van de massa.

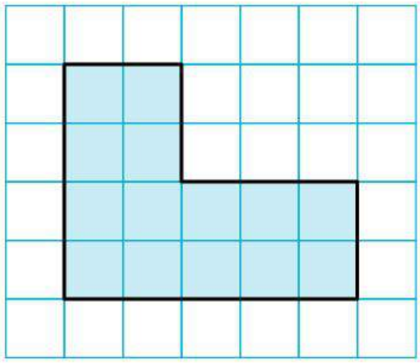


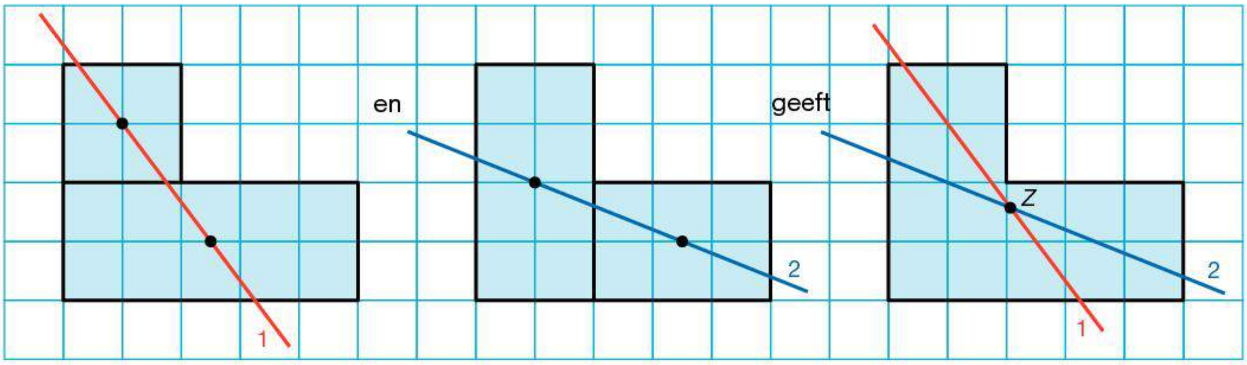
Verhouding van de massa van een gemiddeld persoon:
- hoofd: 9%
- romp: 36%
- armen: 18%
- benen: 36%

Terugblik

Steunlijnen en zwaartepunten

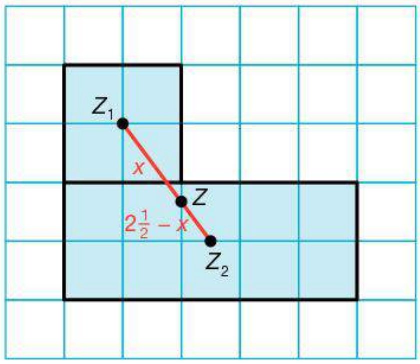
Om van de homogene vorm in de figuur hiernaast met steunlijnen het zwaartepunt te tekenen splitsen we de vorm op twee manieren op in twee stukken. Zie hieronder. Het snijpunt van de steunlijnen is het zwaartepunt Z van de figuur.





De hefboomwet

Je kunt met de hefboomwet de plaats van het zwaartepunt Z in de figuur hiernaast berekenen. De massa die bij Z_1 hoort is 4, de massa die bij Z_2 hoort is 10 en de afstand Z_1Z_2 is $2\frac{1}{2}$.



Stel $Z_1Z = x$, dan is $Z_2Z = 2\frac{1}{2} - x$. Volgens de

hefboomwet is $4 \cdot x = 10 \cdot \left(2\frac{1}{2} - x\right)$ en dat geeft $x = \frac{25}{14} = 1\frac{11}{14}$.

Dus $Z_1Z = 1\frac{11}{14}$ en $Z_2Z = 2\frac{1}{2} - 1\frac{11}{14} = \frac{5}{7}$.

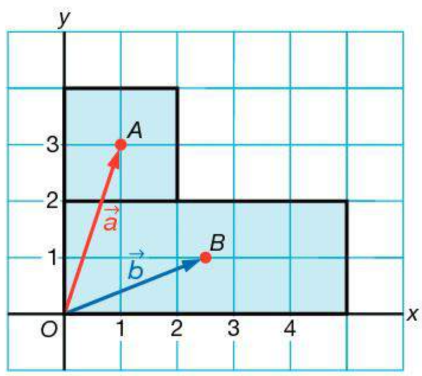
Je kunt ook zeggen dat de verhouding $Z_1Z : Z_2Z = 10 : 4$ is.

Dit geeft $Z_1Z = \frac{10}{14} \cdot 2\frac{1}{2} = 1\frac{11}{14}$ en $Z_2Z = \frac{4}{14} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{5}{7}$.

Vectoren en zwaartepunten

Voor het zwaartepunt Z van de massa's m_1 en m_2 in de punten A en B geldt $\vec{z} = \dfrac{1}{M}(m_1 \cdot \vec{a} + m_2 \cdot \vec{b})$ met $M = m_1 + m_2$.

Voor drie en meer massa's geldt een soortgelijke eigenschap. Neem je in de figuur hiernaast de oorsprong in het aangegeven punt, dan zijn de coördinaten van het zwaartepunt Z te berekenen. Gebruik $m_1 = 4$, $m_2 = 10$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.



Je krijgt $\vec{z} = \frac{1}{14}\left(4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{29}{14} \\ \frac{22}{14} \end{pmatrix}$.

Dus $Z\left(2\frac{1}{14}, 1\frac{4}{7}\right)$.

14.4 Bewegingsvergelijkingen onderzoeken

O 57 De baan van het punt P is gegeven door

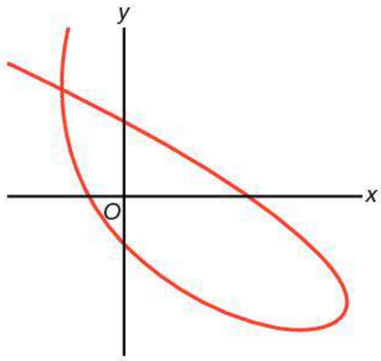
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ y(t) = t^2 - 4t - 1 \end{cases} \text{ met } t \text{ de tijd in seconden.}$$

In figuur 14.70 zie je de baan van P.

a Bereken de coördinaten van P op $t = 3$.

b De baan snijdt van de lijn $y = -1$ een lijnstuk af. Bereken exact de lengte van dit lijnstuk.

c De baan snijdt de lijn $x = 6$ drie keer. Bereken exact voor welke waarden van t dit het geval is.



figuur 14.70

Theorie A Plaats, snelheid en versnelling

De baan van het punt P in opgave 57 is een parameterkromme.

De *plaatsvector* van P is $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ t^2 - 4t - 1 \end{pmatrix}$.

De afgeleide hiervan is de *snelheidsvector* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 6t + 5 \\ 2t - 4 \end{pmatrix}$.

Op $t = -2$ is de snelheidsvector $\vec{v}(-2) = \begin{pmatrix} 21 \\ -8 \end{pmatrix}$ en hieraan kun je zien dat P op $t = -2$ naar rechts en omlaag beweegt.

De afgeleide van de snelheidsvector is de *versnellingsvector* $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2t - 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Op $t = -2$ is de versnellingsvector $\vec{a}(-2) = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ en hieraan kun je zien dat de snelheid van P op $t = -2$ in de positieve x-richting afneemt en in de positieve y-richting toeneemt.

De *baansnelheid* is de grootte van de snelheidsvector. De algemene formule van de baansnelheid is $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Bij het punt P krijg je $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(t^2 - 6t + 5)^2 + (2t - 4)^2}$. Op $t = -2$ is de baansnelheid $|\vec{v}(-2)| = \sqrt{21^2 + (-8)^2} = \sqrt{505}$. Als x en y in cm zijn, is de baansnelheid op $t = -2$ dus $\sqrt{505}$ cm/s ofwel ongeveer 22,5 cm/s.

De *baanversnelling* bereken je met de formule $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}$.

De baanversnelling op $t = -2$ is $a_b(-2) = \dfrac{\begin{pmatrix} 21 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{505}} = \dfrac{-210 - 16}{\sqrt{505}} \approx -10{,}1 \text{ cm/s}^2$.

Hieraan is te zien dat op $t = -2$ de baansnelheid afneemt.

14

Voorbeeld

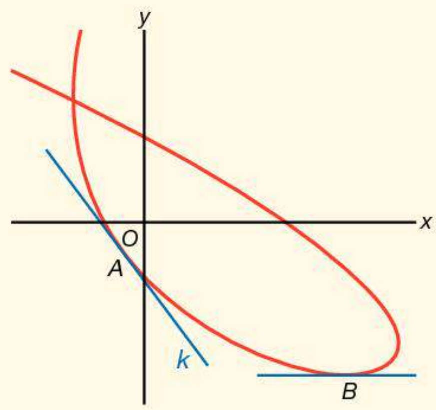
De baan van het punt P is gegeven door

$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ y(t) = t^2 - 4t - 1 \end{cases}$ met t de tijd in seconden.

In figuur 14.71 zie je de baan van P met het punt A waarvoor $t = 4$ en het punt B waar de raaklijn horizontaal is.

a Stel een vergelijking op van de lijn k die de baan raakt in A.

b Bereken de coördinaten van B.



figuur 14.71

Uitwerking

a Stel k: $ax + by = c$.

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ t^2 - 4t - 1 \end{pmatrix}$ geeft $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 6t + 5 \\ 2t - 4 \end{pmatrix}$

$\vec{v}(4) = \begin{pmatrix} 4^2 - 6 \cdot 4 + 5 \\ 2 \cdot 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, dus $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } 4x + 3y = c \\ t = 4 \text{ geeft het punt } \left(-\frac{2}{3}, -1\right) \end{array}\right\} c = 4 \cdot -\frac{2}{3} + 3 \cdot -1 = -5\frac{2}{3}$

Dus k: $4x + 3y = -5\frac{2}{3}$.

b Evenwijdig aan de x-as, dus $y'(t) = 0 \wedge x'(t) \neq 0$.

Dus $2t - 4 = 0 \wedge t^2 - 6t + 5 \neq 0$

$2t = 4 \wedge (t - 1)(t - 5) \neq 0$

$t = 2 \wedge (t \neq 1 \wedge t \neq 5)$

Dus $t = 2$ en dit geeft het punt $B\left(6\frac{2}{3}, -5\right)$.

58 Zie het voorbeeld met de bewegingsvergelijkingen

$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 6 \\ y(t) = t^2 - 4t - 1 \end{cases}$ met t in seconden en x en y in cm.

a Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig aan de y-as is.

De baan snijdt zichzelf in het punt $C\left(-2\frac{1}{3}, 4\right)$.

b Toon dit aan.

c Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt.

De baan snijdt de positieve y-as voor $t = 6$ in het punt D. De lijn l raakt de baan in D.

d Stel van l een vergelijking op.

e Bereken exact de baansnelheid in D.

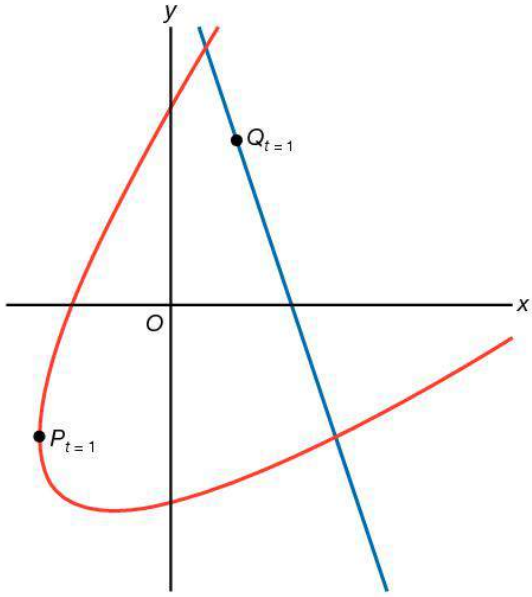
f Bereken exact de baanversnelling in D.

59 De baan van het punt P is gegeven door

$\begin{cases} x_P(t) = t^2 - 2t - 3 \\ y_P(t) = t^2 + t - 6 \end{cases}$ en de baan van het punt Q is

gegeven door $\begin{cases} x_Q(t) = -t + 3 \\ y_Q(t) = 3t + 2 \end{cases}$ met t de tijd in

seconden en x en y in cm.
In figuur 14.72 zijn de banen van P en Q getekend. De plaatsen van P en Q zijn getekend voor $t = 1$.



figuur 14.72

a Bereken exact de afstand tussen P en Q op $t = 1$.

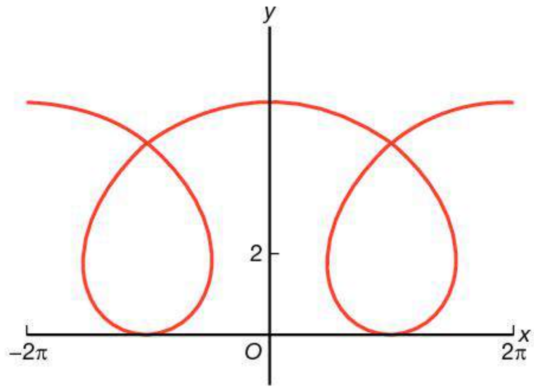
Er is precies één tijdstip waarop P en Q zich op dezelfde plaats bevinden.

b Bereken exact deze waarde van t en in graden nauwkeurig de hoek tussen de banen in dit punt.
c Bereken exact de coördinaten van het punt van de baan van P waarin de raaklijn evenwijdig is met de baan van Q.
d Bereken exact in welk punt van de baan van P de versnellingsvector loodrecht staat op de snelheidsvector.
e Bereken exact de baanversnelling in het punt waar P de negatieve x-as passeert.

60 De baan van een punt P is gegeven door

$\begin{cases} x(t) = t + 3\sin(t) \\ y(t) = 3 + 3\cos(t) \end{cases}$ met t in seconden en

$-2\pi \leq t \leq 2\pi$ en x en y in cm.
De baan van P is getekend in figuur 14.73. De lijn $y = 4\frac{1}{2}$ snijdt de baan van P van links naar rechts in de punten A, B, C en D.



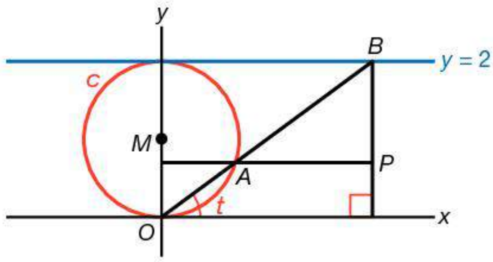
figuur 14.73

a Bereken exact de lengte van het lijnstuk AD.
b De baan van P heeft vier verticale raaklijnen. Bereken exact de y-coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn verticaal is.

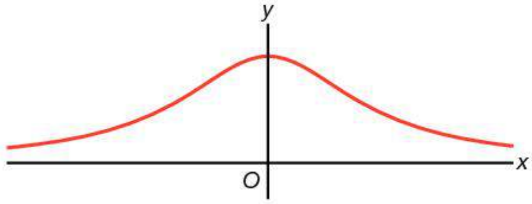
De baansnelheid van P wordt gegeven door de formule $|\vec{v}(t)| = \sqrt{10 + 6\cos(t)}$.

c Toon aan dat deze formule juist is.
d Bereken exact de maximale baansnelheid van P.
e Bereken exact de baanversnelling op $t = \frac{1}{2}\pi$.

A 61 Een punt P legt een baan af die als volgt ontstaat. Zie figuur 14.74. De cirkel c heeft middelpunt $M(0, 1)$ en straal 1. De lijn door de oorsprong en een punt A op c snijdt de lijn $y = 2$ in het punt B. De horizontale lijn door A en de verticale lijn door B snijden elkaar in P.
De hoek die de lijn OA met de x-as maakt is t radialen met $0 < t < \pi$.
In figuur 14.75 zie je de baan P.



figuur 14.74



figuur 14.75

Voor deze baan geldt $\begin{cases} x_p(t) = \dfrac{2\cos(t)}{\sin(t)} \\ y_p(t) = 1 - \cos(2t) \end{cases}$

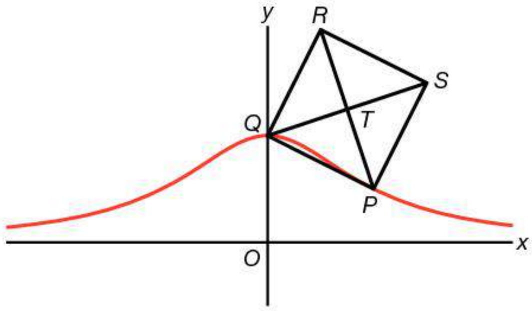
a Toon aan dat de formule voor $x(t)$ juist is.
b Druk de hoeken van driehoek OAM uit in t en toon aan dat de formule voor $y(t)$ juist is.
c De lijn $y = \frac{1}{2}$ snijdt de baan in de punten A en B. Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.
d Stel een vergelijking op van de lijn k die de baan van P raakt in het punt met $t = \frac{1}{6}\pi$.

Bij de baan hoort de formule $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$.

e Toon dit aan.
f De baan van P heeft twee buigpunten. Bereken exact de coördinaten van deze buigpunten.

In figuur 14.76 zie je nog eens de baan van P. Verder is het punt $Q(0, 2)$ getekend. Het lijnstuk PQ is de zijde van een vierkant zoals in de figuur. Het punt T is het middelpunt van dit vierkant.

g Stel de bewegingsvergelijkingen van T op.



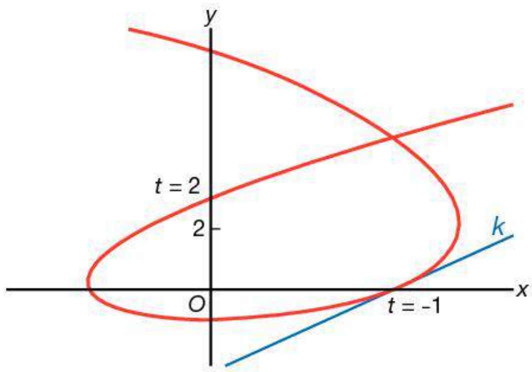
figuur 14.76

Terugblik

Snelheidsvector en baansnelheid

De bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^3 + t^2 - 6t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$ met t de tijd geven de baan van een punt P. In de figuur hiernaast is de baan getekend. De baan is een parameterkromme. De snelheidsvector $\vec{v}(t)$ is de afgeleide van de plaatsvector $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 + t^2 - 6t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$,

dus $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + 2t - 6 \\ 2t \end{pmatrix}$.



Om de vergelijking van de raaklijn k op te stellen in het punt waarvoor $t = -1$ bereken je $\vec{r}(-1)$ en $\vec{v}(-1)$. Uit $\vec{v}(-1) = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ volgt $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dus k: $2x - 5y = c$.

Omdat $\vec{r}(-1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ krijg je k: $2x - 5y = 12$.

Om de hoek φ te berekenen waaronder de baan de y-as snijdt voor $t = 2$ gebruik je

$\vec{v}(2)$ en $\vec{r}_{y\text{-as}}$. Je krijgt $\cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{v}(2) \cdot \vec{r}_{y\text{-as}}|}{|\vec{v}_2| \cdot |\vec{r}_{y\text{-as}}|} = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{116} \cdot 1} = \dfrac{4}{\sqrt{116}}$, dus $\varphi \approx 68{,}2°$.

Om de waarden van t te berekenen waarvoor de raaklijn aan de baan verticaal is, los je de vergelijking $x'(t) = 0 \wedge y'(t) \neq 0$ op.

$x'(t) = 0$ geeft $3t^2 + 2t - 6 = 0$ en hieruit volgt $t = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{19} \vee t = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{19}$.

De baansnelheid is de lengte van de snelheidsvector, dus $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$,

dus de baansnelheid van P op $t = 2$ is $|\vec{v}(t)| = \left|\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{116}$.

Versnellingsvector en baanversnelling

De versnellingsvector $\vec{a}(t)$ is de afgeleide van de snelheidsvector, dus bij de bewegingsvergelijkingen hierboven hoort $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 6t + 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De baanversnelling bereken je met de formule $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}$.

Bij de bewegingsvergelijkingen hierboven bereken je de baanversnelling voor $t = 2$ als volgt.

$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\vec{a}(2) = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$, dus $a_b(2) = \dfrac{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{140 + 8}{\sqrt{116}} = \dfrac{148}{\sqrt{116}}$.

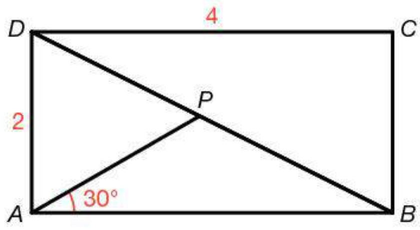
Diagnostische toets

14.1 Vergelijkingen bij meetkundige figuren

1 Herleid tot de vorm $a + b\sqrt{c}$.

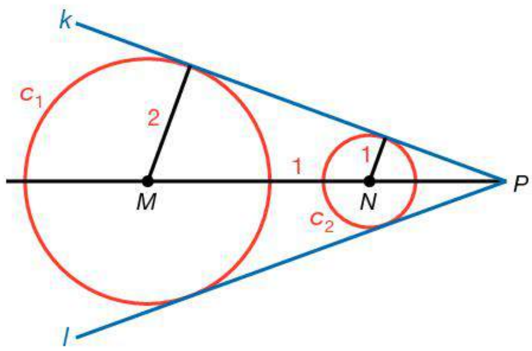
a $\dfrac{3}{\sqrt{7} - 1}$ **b** $\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

2 Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $CD = 4$ en $AD = 2$. Op de diagonaal BD ligt het punt P zo, dat $\angle BAP = 30°$. Bereken exact de lengte van AP. Geef het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$.



figuur 14.77

3 Gegeven zijn de cirkel c_1 met middelpunt M en straal 2 en de cirkel c_2 met middelpunt N en straal 1. De afstand tussen de beide cirkels is 1. De gemeenschappelijke raaklijnen k en l snijden elkaar in het punt P. Zie figuur 14.78. Bereken exact $\sin(\angle(k, l))$.



figuur 14.78

14.2 Lijnen en cirkels

4 Gegeven is driehoek ABC met $A(1, 1)$, $B(5, 4)$ en $C(1, 8)$.

a Bereken exact de coördinaten van het snijpunt M van de middelloodlijnen van de zijden AC en BC.

b De bissectrice k van $\angle A$ snijdt de zijde BC in het punt D. Bereken exact de coördinaten van D.

c Stel vergelijkingen op van de lijnen l_1 en l_2 door B die de lijn AC snijden onder een hoek van 60°.

5 **a** De lijn k: $2x + y = 9$ raakt de cirkel c_1 met middelpunt $M(2, 1)$. Stel een vergelijking op van c_1.

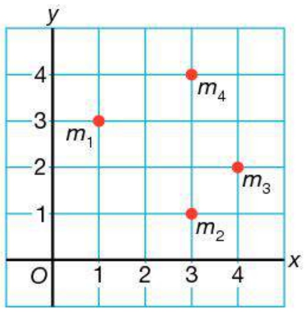
b De lijn l raakt de cirkel c_2: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ in het punt $A(2, -1)$. Stel een vergelijking op van l.

c Stel vergelijkingen op van de lijnen m_1 en m_2 door het punt $P(1, 2)$ die de cirkel c_3: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ raken.

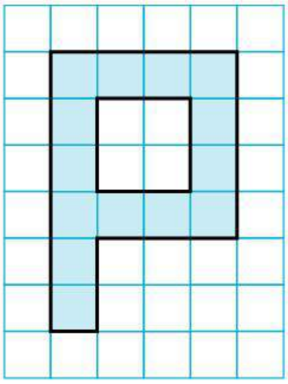
d Stel vergelijkingen op van de lijnen n_1 en n_2 die evenwijdig zijn met de lijn p: $y = 2x + 10$ die de cirkel c_4: $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20 = 0$ raken.

14.3 Zwaartepunten

6 In figuur 14.79 zijn de massa's m_1, m_2, m_3 en m_4 in een assenstelsel getekend.
Er geldt $m_1 = 5$, $m_2 = 2$, $m_3 = 8$ en $m_4 = 12$.
Bereken exact de coördinaten van het zwaartepunt Z van deze puntmassa's.



figuur 14.79



figuur 14.80

7 [▶ WERKBLAD] In figuur 14.80 zie je een letter P.
Teken de plaats van het zwaartepunt met behulp van vectoren.

14.4 Bewegingsvergelijkingen onderzoeken

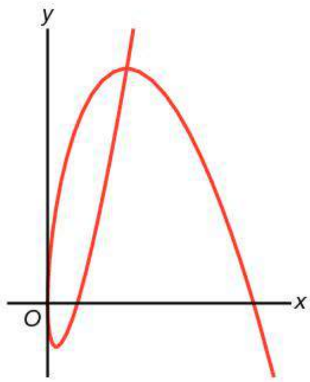
8 De baan van het punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t \end{cases}$
met t de tijd in seconden en x en y in cm. Zie figuur 14.81.

a Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as of aan de y-as.

b De baan gaat voor $t = 2$ door het punt A. De lijn k raakt de baan in A. Stel van k een vergelijking op.

c De baan snijdt zichzelf in het punt $B(9, 27)$. Bereken de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt in B.

d De baan gaat voor $t = -1$ door het punt C. Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in C.



figuur 14.81

9 De baan van het punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = t + \cos(t) \end{cases}$
met t de tijd in seconden en $-\pi \le t \le \pi$ en x en y in cm.
Zie figuur 14.82.

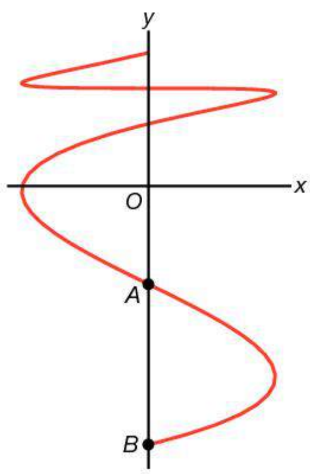
De baan gaat door de punten $A\left(0, -\frac{1}{2}\pi\right)$ en $B\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$.

a Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as of aan de y-as.

b De lijn k raakt de baan in A. Stel van k een vergelijking op.

c Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in B.

d Gerrit beweert dat de baansnelheid maximaal is in A. Onderzoek of Gerrit gelijk heeft.



figuur 14.82

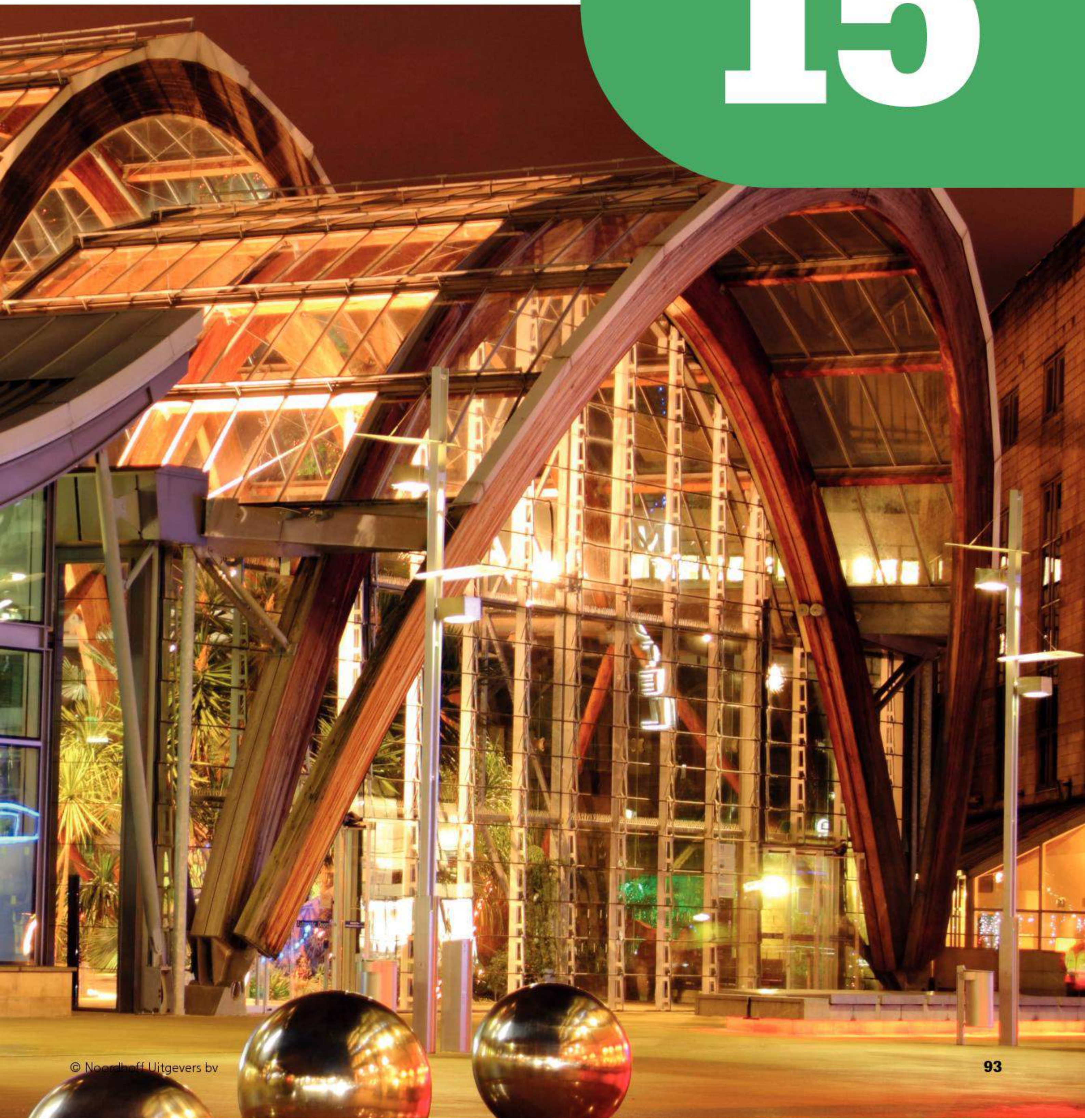
Op de foto zie je de boogconstructie die is toegepast in de Winter Garden in Sheffield (Engeland). De bogen hebben de vorm van een omgekeerde kettinglijn. Het voordeel van deze zogenaamde kettingbogen is, dat er in de bogen alleen drukkrachten optreden. In de oudheid werden al kettingbogen toegepast en ook de gewelven van de Sagrada Familia in Barcelona van de architect Antoni Gaudi hebben deze vorm.

Wat leer je?

- Het verband tussen de verschillende soorten van stijgen en dalen en de eerste en tweede afgeleide.
- Berekeningen maken over afstanden bij toppen en hoeken tussen krommen.
- Rekenen aan rakende grafieken en grafieken die elkaar loodrecht snijden.
- Optimaliseringsproblemen oplossen.
- Integralen gebruiken bij problemen over oppervlakte en inhoud.

Afgeleiden en primitieven

15



Voorkennis Differentiëren en integreren

15

Theorie A Differentiëren

De definitie van de afgeleide is $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Hieruit volgen onderstaande regels voor het differentiëren.

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = nax^{n-1}$ voor elke $n \in \mathbb{R}$

$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = \mathrm{e}^x$

$f(x) = a^x$ geeft $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = {}^g\!\log(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln(g)}$

$f(x) = \sin(x)$ geeft $f'(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x)$ geeft $f'(x) = -\sin(x)$

$f(x) = \tan(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ productregel

$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$ quotiëntregel

$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ kettingregel

In de voorbeelden wordt een combinatie van de productregel of de quotiëntregel met de kettingregel gebruikt.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 3x\sqrt{4x-1}$ **b** $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x^2-1}$ **c** $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$

Uitwerking

a $f(x) = 3x\sqrt{4x-1}$ geeft

$$f'(x) = 3 \cdot \sqrt{4x-1} + 3x \cdot \frac{4}{2\sqrt{4x-1}} = 3\sqrt{4x-1} + \frac{6x}{\sqrt{4x-1}} = \frac{3(4x-1)+6x}{\sqrt{4x-1}} = \frac{18x-3}{\sqrt{4x-1}}$$

b $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x^2-1}$ geeft

$$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2-1} + x^2 \cdot \mathrm{e}^{x^2-1} \cdot 2x = 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1} + 2x^3\,\mathrm{e}^{x^2-1} = (2x^3+2x)\mathrm{e}^{x^2-1}$$

c $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$ geeft $g'(x) = \dfrac{(x+1) \cdot \frac{1}{x} - \ln(x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x\ln(x)}{x(x+1)^2}$

Bij het exact berekenen van extreme waarden van f

- bereken je $f'(x)$ en los je exact op $f'(x) = 0$
- kijk je in de grafiek of je met een maximum of een minimum te maken hebt
- noteer je het antwoord in de vorm max. is $f(...) = ...$ of min. is $f(...) = ...$

De grafiek van f heeft een buigpunt als de afgeleide f' een extreme waarde heeft.
Bij het exact berekenen van de coördinaten van buigpunten van de grafiek van f

- bereken je $f'(x)$ en $f''(x)$
- los je exact op $f''(x) = 0$
- kijk je in een schets van de grafiek van f of de gevonden oplossingen buigpunten opleveren.

15

1 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{5x}$

b $f(x) = 10x \cdot 2^x$

c $f(x) = x^2 - x\ln(x)$

d $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^2}$

e $f(x) = {}^2\log(x^2 + 4)$

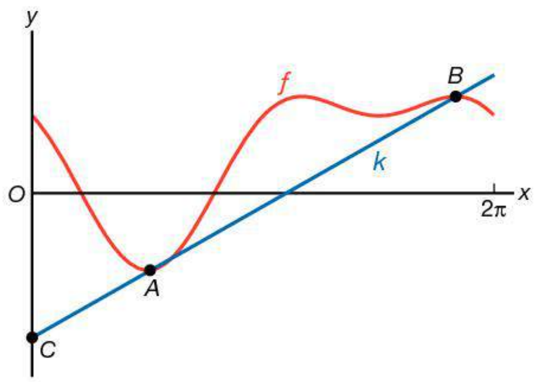
f $f(x) = 3\sin(x)\sin(2x)$

2 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$.

a Bereken exact de extreme waarden van f.

b Bereken exact de x-coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.

3 Gegeven is de functie $f(x) = \cos^2(x) - \sin(x)$ met domein $[0, 2\pi]$. In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f. De lijn k gaat door de toppen A en B van de grafiek en snijdt de y-as in het punt C. Bereken exact de y-coördinaat van C.



figuur 15.1

Theorie B Integreren

De functie F is een primitieve van de functie f als $F' = f$.
Hieronder staan de belangrijkste regels voor het primitiveren.

$f(x) = ax^n$ geeft $F(x) = \dfrac{a}{n+1}x^{n+1} + c$ met $n \neq -1$
$f(x) = g^x$ geeft $F(x) = \dfrac{g^x}{\ln(g)} + c$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $F(x) = \mathrm{e}^x + c$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$
$f(x) = \ln(x)$ geeft $F(x) = x\ln(x) - x + c$
$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$
$f(x) = \sin(x)$ geeft $F(x) = -\cos(x) + c$
$f(x) = \cos(x)$ geeft $F(x) = \sin(x) + c$
De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\dfrac{1}{a}F(ax + b) + c$.

De oppervlakte van het vlakdeel V dat boven de x-as ligt en wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$ is $O(V) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

Het vlakdeel V ligt boven de x-as en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de x-as en de lijnen $x = a$ en $x = b$ met $a < b$. De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as is

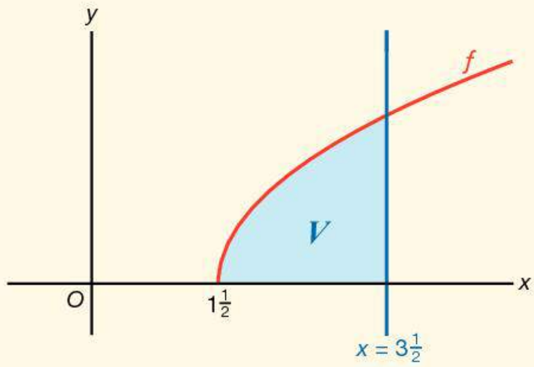
$$I(L) = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Het vlakdeel V ligt rechts van de y-as en wordt ingesloten door de grafiek van de functie f, de y-as en de lijnen $y = a$ en $y = b$ met $a < b$. De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de y-as wentelt is

$$I(L) = \pi\int_a^b x^2\,\mathrm{d}y.$$

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{2x - 3}$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = 3\frac{1}{2}$. Zie figuur 15.2.
Bereken exact
a de oppervlakte van V
b de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt
c de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als V om de y-as wentelt.



figuur 15.2

Uitwerking

a $O(V) = \int_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} \sqrt{2x-3}\,dx = \int_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} (2x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(2x-3)^{1\frac{1}{2}}\right]_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}}$

$= \left[\frac{1}{3}(2x-3)\sqrt{2x-3}\right]_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} - 0 = 2\frac{2}{3}$

b $I(L) = \pi \int_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} (f(x))^2\,dx = \pi \int_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}} (2x-3)\,dx = \pi\left[x^2 - 3x\right]_{1\frac{1}{2}}^{3\frac{1}{2}}$

$= \pi\left(12\frac{1}{4} - 10\frac{1}{2} - \left(2\frac{1}{4} - 4\frac{1}{2}\right)\right) = 4\pi$

c $I(M) = I(\text{cilinder}) - \pi \int_{0}^{f(3\frac{1}{2})} x^2\,dy$

$y = \sqrt{2x-3}$ geeft $y^2 = 2x - 3$, dus $x = \frac{1}{2}y^2 + 1\frac{1}{2}$.

$I(M) = \pi \cdot \left(3\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 - \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}y^2 + 1\frac{1}{2}\right)^2 dy$

$= 24\frac{1}{2}\pi - \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}y^4 + 1\frac{1}{2}y^2 + 2\frac{1}{4}\right) dy$

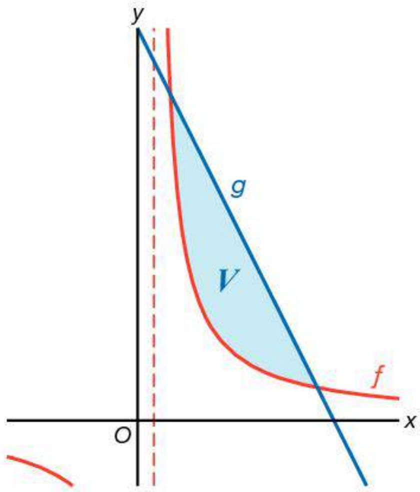
$= 24\frac{1}{2}\pi - \pi\left[\frac{1}{20}y^5 + \frac{1}{2}y^3 + 2\frac{1}{4}y\right]_0^2$

$= 24\frac{1}{2}\pi - \pi\left(1\frac{3}{5} + 4 + 4\frac{1}{2} - 0\right) = 14\frac{2}{5}\pi$

$f(3\frac{1}{2}) = \sqrt{2 \cdot 3\frac{1}{2} - 3} = 2$
Dus de cilinder heeft straal $3\frac{1}{2}$ en hoogte 2.

4 Zie het voorbeeld.
a Bereken exact de inhoud van het lichaam N dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = -1$.
b Bereken exact de inhoud van het lichaam P dat ontstaat als V wentelt om de lijn $x = 3\frac{1}{2}$.

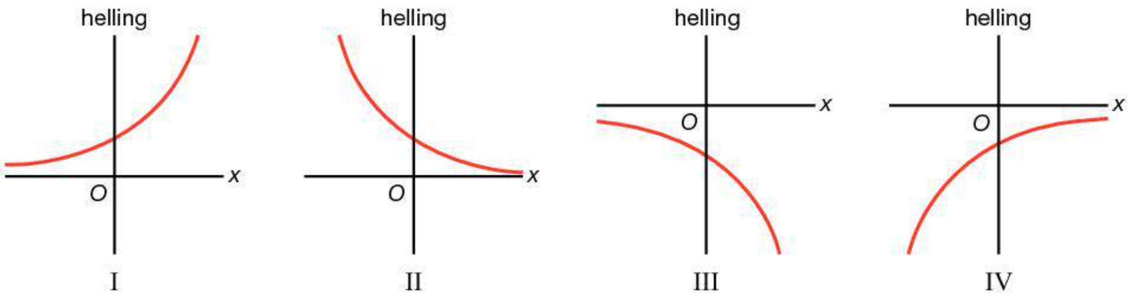
5 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{10}{2x - 1}$ en $g(x) = -2x + 12$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g. Zie figuur 15.3.
Bereken exact
a de oppervlakte van V
b de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V om de x-as wentelt
c de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als V om de y-as wentelt.



figuur 15.3

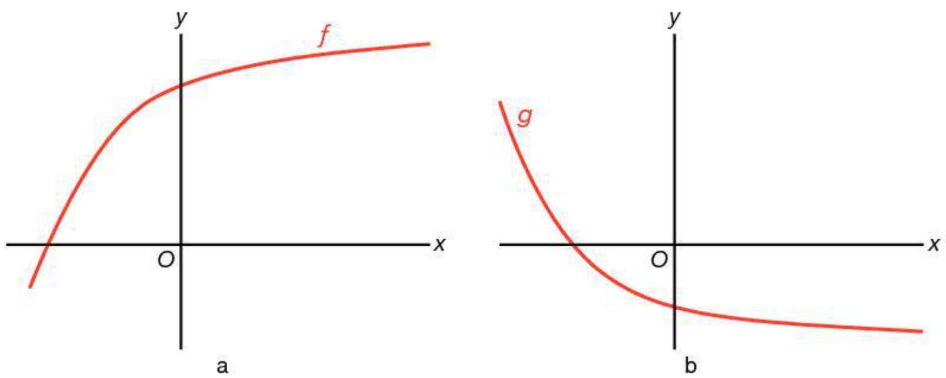
15.1 Hellingen, buigpunten en toppen

O 1 In figuur 15.4 zijn enkele hellinggrafieken getekend.
a Teken bij elke hellinggrafiek een globale grafiek van de oorspronkelijke functie.
b Bij elke grafiek in figuur 15.4 hoort een hellinggrafiek. Schets deze hellinggrafieken.



figuur 15.4

O 2 In figuur 15.5a zie je de grafiek van een afnemend stijgende functie f.
a Teken in aparte figuren globale grafieken de functies f' en f''.



figuur 15.5

In figuur 15.5b zie je de grafiek van een afnemend dalende functie g.
b Teken in aparte figuren globale grafieken van de functies g' en g''.

O 3 Gegeven is de functie $f(x) = x + \frac{1}{2}e^x$.
Aan het functievoorschrift van f'' is te zien dat de grafiek van f toenemend stijgend is.
Licht dit toe.

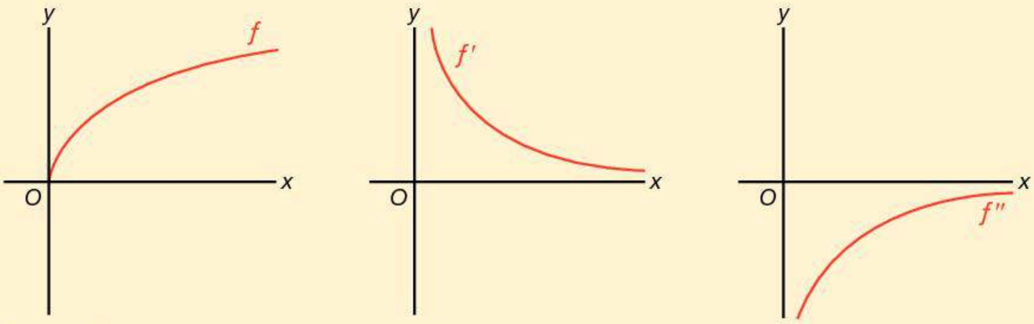
Theorie A Soorten van stijgen en dalen

De afgeleide van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ is $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Omdat $f'(x) > 0$ voor elke $x > 0$ is de functie f stijgend voor $x > 0$.

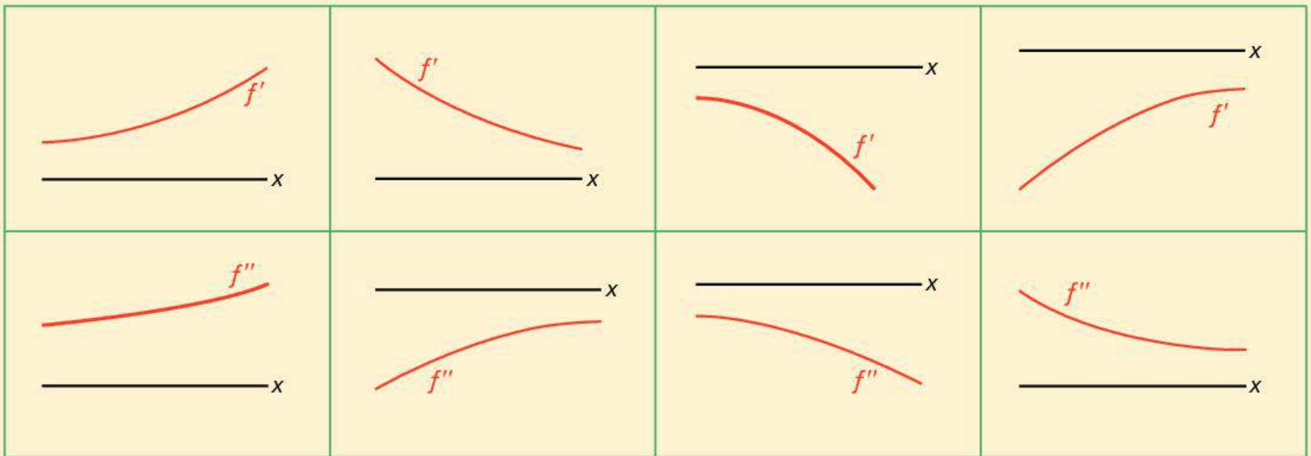
Uit $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ volgt $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-1\frac{1}{2}} = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$.

Omdat $f''(x) < 0$ voor elke $x > 0$ is de functie f' dalend voor $x > 0$.
Dit betekent dat de helling van de grafiek van f steeds kleiner wordt.
Omdat de grafiek van f stijgend is en de grafiek van f' dalend is, zal de grafiek van f dus afnemend stijgend zijn.
In figuur 15.6 zijn de grafieken van f, f' en f'' geschetst.



figuur 15.6

Je kunt dus aan de grafieken van de afgeleide f' en de tweede afgeleide f'' zien welke soort van stijgen of dalen bij de grafiek van f hoort.



$f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$ dus f is toenemend stijgend	$f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$ dus f is afnemend stijgend	$f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$ dus f is toenemend dalend	$f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$ dus f is afnemend dalend

Is de functie $f(x) = \sqrt{x}$ gegeven met de formule $y = \sqrt{x}$, dan noteren we $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en $y'' = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$.

Ook de notaties met $y'(x)$ en $y''(x)$ komen voor.
Verder wordt vaak de **d-notatie** gebruikt. De afgeleide van $y = \sqrt{x}$ wordt dan genoteerd als $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ en de tweede afgeleide als $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}$.

Bij de formule $N = t + 0{,}1e^t$ krijg je $\dfrac{dN}{dt} = 1 + 0{,}1e^t$ en $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dN}{dt}\right) = 0{,}1e^t$.

15

Voorbeeld

Bij een onderzoek naar het aantal woorden dat iemand per minuut kan typen gebruikt men het model $N = 100(1 - e^{-0{,}02t})$. Hierin is N het aantal woorden per minuut en t het aantal uren praktijkervaring.
Toon algebraïsch aan dat N een afnemend stijgende functie van t is.

Aanpak

Bereken $\dfrac{dN}{dt}$ en $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dN}{dt}\right)$.

Gebruik: als $\dfrac{dN}{dt} > 0$ voor elke t dan is N stijgend.

Als bovendien $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dN}{dt}\right) < 0$ voor elke t dan is N afnemend stijgend.

Uitwerking

$N = 100(1 - e^{-0{,}02t}) = 100 - 100\,e^{-0{,}02t}$ geeft

$\dfrac{dN}{dt} = -100 \cdot e^{-0{,}02t} \cdot -0{,}02 = 2\,e^{-0{,}02t}$

$\dfrac{dN}{dt} = 2\,e^{-0{,}02t}$ geeft $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dN}{dt}\right) = 2 \cdot e^{-0{,}02t} \cdot -0{,}02 = -0{,}04\,e^{-0{,}02t}$

Omdat voor elke t geldt $e^{-0{,}02t} > 0$, is $\dfrac{dN}{dt} > 0$ en $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dN}{dt}\right) < 0$.

Dus N is een afnemend stijgende functie van t.

4 De temperatuur van een afkoelend voorwerp wordt beschreven met het model $T = 20 + 80\,e^{-0{,}2t}$. Hierin is T de temperatuur in °C en t de tijd in minuten.
Toon algebraïsch aan dat het afkoelingsproces steeds langzamer verloopt.

A 5 In een vat zit 100 liter water. Bij kantelen van het vat stroomt de inhoud weg. Hierbij hoort de formule $V = 100\,\mathrm{e}^{-0{,}01t^2}$. Hierin is V de resterende hoeveelheid water in het vat in liter en t de tijd in minuten.

a Na hoeveel seconden is de helft van de inhoud weggestroomd?

b Bereken algebraïsch voor welke t de uitstroomsnelheid maximaal is. Na hoeveel seconden is dat?

c Hoeveel seconden na het in b genoemde tijdstip is de uitstroomsnelheid afgenomen tot de helft van de maximale uitstroomsnelheid?

6 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 5)$.
Onderzoek langs algebraïsche weg welke soort van daling er is in het punt $A(1, 8)$.

A 7 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$.
Onderzoek langs algebraïsche weg welke soort van stijgen of dalen er is in de punten A, B en C van de grafiek van f met $x_A = -3$, $x_B = 0$ en $x_C = 1$.

O 8 Gegeven is de functie $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.
Toon aan dat de grafiek van f bij $x = 2\frac{1}{2}$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.

Theorie B Buigpunten

In een buigpunt gaat een grafiek
- over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend of
- over van afnemend stijgend naar toenemend stijgend of
- over van afnemend dalend naar toenemend dalend of
- over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

Voorbeeld

Bereken exact voor welke waarden van a en b de grafiek van $f(x) = ax^3 + 2x^2 + 5x + b$ in het punt (2, 10) overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

Uitwerking

$f(x) = ax^3 + 2x^2 + 5x + b$

$f'(x) = 3ax^2 + 4x + 5$

$f''(x) = 6ax + 4$

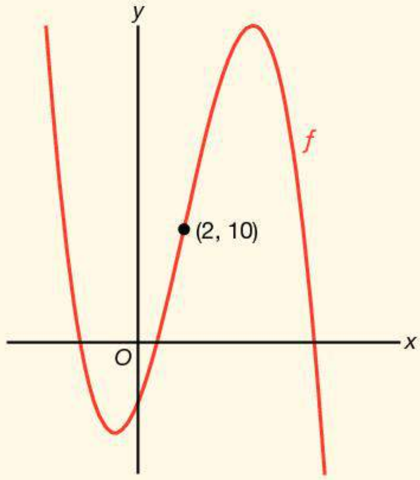
Er moet gelden $f''(2) = 0$, dus $12a + 4 = 0$

$a = -\frac{1}{3}$

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + b$

$f(2) = 10$ geeft $-\frac{1}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + b = 10$

$b = -5\frac{1}{3}$



De grafiek van f gaat voor $a = -\frac{1}{3}$ en $b = -5\frac{1}{3}$ in het punt (2, 10) over van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

9 De grafiek van $f(x) = ax^4 - \frac{1}{6}x^3 - 3x^2 + 4x + b$ gaat in het punt (3, 5) over van toenemend dalend naar afnemend dalend.

a Bereken a en b exact.

b Bereken exact in welk punt de grafiek overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

10 Voor elke a en b is gegeven de functie $f(x) = ax\,e^{bx}$.
Bereken exact voor welke a en b het punt $\left(-2, -\frac{4}{e}\right)$ een top is van de grafiek van f en de grafiek voor $x = -4$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.

11 Voor elke waarde van a wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = (x^2 + ax)\,e^x$.

a Bereken exact voor welke a de functie f_a een maximum heeft voor $x = -3$ en bereken exact voor deze a het minimum van f_a.

b Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a bij $x = -4$ overgaat van toenemend stijgend naar afnemend stijgend.

A 12 Bereken exact voor welke p de grafiek van de functie $f_p(x) = \dfrac{10}{x^2 + p}$ bij $x = 2$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend.

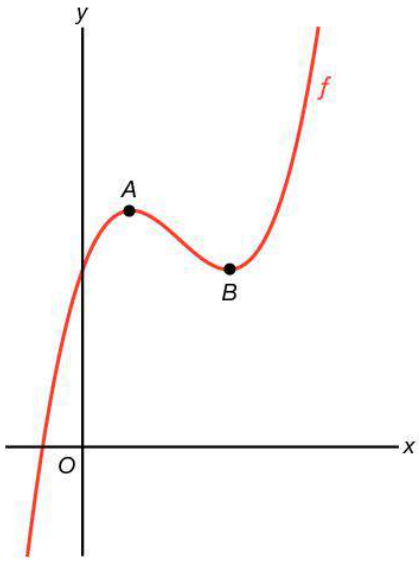
A 13 De afgelegde afstand van een raceauto wordt voor $0 \leq t \leq 15$ beschreven door een tijd-afstandsformule van de vorm $s(t) = at^3 + bt^2$. Hierin is t de tijd in seconden en s de afgelegde afstand in meter.
Verder is gegeven
- tussen $t = 0$ en $t = 10$ gaat de auto steeds sneller rijden
- vanaf $t = 10$ neemt de snelheid af
- op $t = 15$ is 675 meter afgelegd.

a Bereken exact a en b.

15

Na $t = 15$ verandert de snelheid niet meer.
b Hoeveel meter is in totaal afgelegd op $t = 30$?
c Na hoeveel seconden is 2 km afgelegd? Rond af op gehelen.

O 14 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$. De toppen van de grafiek van f zijn A en B. Zie figuur 15.7.
a Bereken exact de coördinaten van A en B.
b Bereken de afstand tussen de punten O en A en de afstand tussen de punten O en B. Rond zo nodig af op twee decimalen.



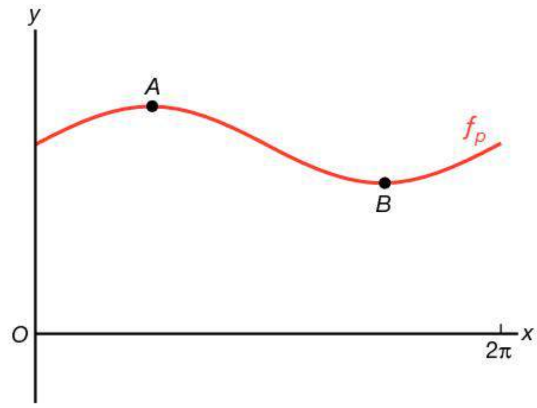
figuur 15.7

Theorie C Toppen en afstanden

De grafiek van de functie $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + p$ heeft twee toppen. We noemen ze A en B.
Om te berekenen voor welke p de afstand tussen de punten O en A gelijk is aan de afstand tussen de punten O en B ga je als volgt te werk.
- Bereken de x-coördinaten van A en B.
  Je krijgt $x_A = 1$ en $x_B = 3$.
- Druk y_A en y_B uit in p.
  Je krijgt $y_A = 1\frac{1}{3} + p$ en $y_B = p$.
- Druk OA^2 en OB^2 uit in p.
  Je krijgt $OA^2 = 1^2 + \left(1\frac{1}{3} + p\right)^2 = p^2 + 2\frac{2}{3}p + 2\frac{7}{9}$ en
  $OB^2 = 3^2 + p^2 = p^2 + 9$.
- Los de vergelijking $OA^2 = OB^2$ op.
  Je krijgt $p^2 + 2\frac{2}{3}p + 2\frac{7}{9} = p^2 + 9$ en dit geeft $p = 2\frac{1}{3}$.

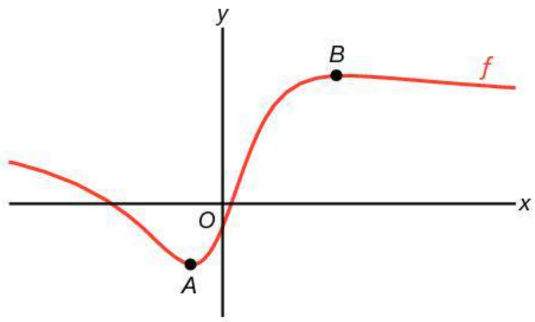
Dus voor $p = 2\frac{1}{3}$ is de lengte van het lijnstuk OA gelijk aan de lengte van het lijnstuk OB.

15 Voor elke p is functie f_p gegeven door $f_p(x) = p + \sin(x)$ met domein $[0, 2\pi]$.
De toppen van de grafiek van f_p zijn A en B. Zie figuur 15.8.
Bereken exact voor welke p de lengte van het lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OB.



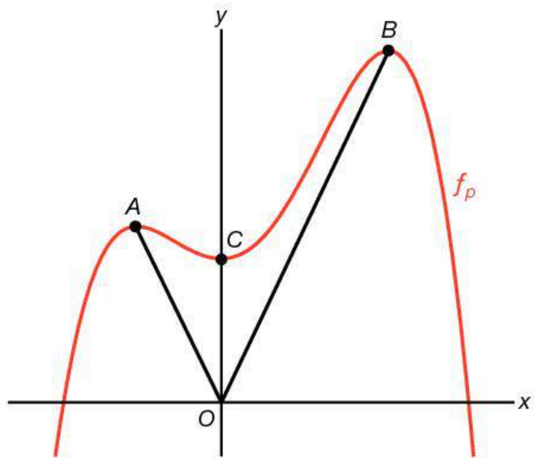
figuur 15.8

16 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 4}$. In figuur 15.9 zie je de grafiek van f met de toppen A en B. Door de grafiek van f over een afstand p naar beneden te verschuiven ontstaat de grafiek van g met de toppen C en D.
Bereken exact de waarde van p waarvoor de lengte van het lijnstuk OC gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OD.



figuur 15.9

A 17 Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = -0{,}03x^4 + 0{,}08x^3 + 0{,}48x^2 + p$. In figuur 15.10 is de grafiek van f_p voor een zekere waarde van p getekend. De toppen van de grafiek zijn A, B en C. De waarde van p in figuur 15.10 is zo gekozen dat geldt $OB = 2OA$.
Bereken exact deze waarde van p.



figuur 15.10

Terugblik

Soorten van stijgen en dalen

Is van de functie $y = f(x)$ op het interval $\langle a, b \rangle$ de afgeleide $f'(x) > 0$ en ook de tweede afgeleide $f''(x) > 0$, dan is f toenemend stijgend op $\langle a, b \rangle$. Zo kun je ook de andere soorten van stijgen en dalen afleiden uit het positief of negatief zijn van de afgeleide en de tweede afgeleide.

Om te onderzoeken met welke soort van stijgen of dalen je bij de functie $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ te maken hebt voor $x = 2$ bereken je $f'(2)$ en $f''(2)$.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$ en $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$

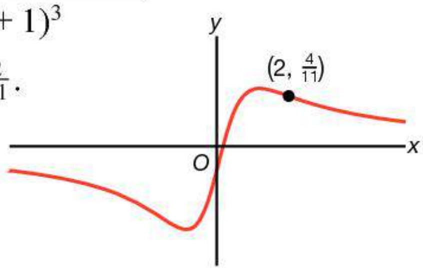
Dit geeft $f'(2) = -0{,}12 < 0$ en $f''(2) = 0{,}032 > 0$, dus de grafiek van f is afnemend dalend voor $x = 2$.

Buigpunten

In een buigpunt gaat een grafiek over van de ene soort stijgen in de andere soort stijgen of van de ene soort dalen in de andere soort dalen. Om te berekenen voor welke waarde van a de grafiek van $f_a(x) = \dfrac{x + a}{x^2 + 1}$ voor $x = 2$ overgaat van toenemend dalend naar afnemend dalend, los je eerst de vergelijking $f_a''(2) = 0$ op.

$f_a(x) = \dfrac{x + a}{x^2 + 1}$ geeft $f_a'(x) = \dfrac{-x^2 - 2ax + 1}{(x^2 + 1)^2}$ en $f_a''(x) = \dfrac{2x^3 + 6ax^2 - 6x - 2a}{(x^2 + 1)^3}$

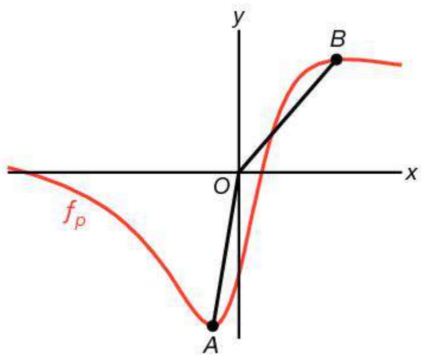
$f_a''(2) = 0$ geeft $2 \cdot 2^3 + 6a \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 2a = 0$ en dit geeft $a = -\frac{2}{11}$.



In de figuur hiernaast zie je de grafiek van $f_{-\frac{2}{11}}$. Een van de buigpunten is $\left(2, \frac{4}{11}\right)$.

Toppen en afstanden

De grafiek van $f_p(x) = \dfrac{4x - 3}{x^2 + 1} + p$ heeft de toppen A en B.



Zie de grafiek hiernaast. Om te berekenen voor welke p de lengte van het lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van het lijnstuk OB druk je eerst de coördinaten van A en B uit in p.

$f_p'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2 + 1)^2}$

$f_p'(x) = 0$ geeft $x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$

Je krijgt $A\left(-\frac{1}{2}, -4 + p\right)$ en $B(2, 1 + p)$. Dit geeft

$OA^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-4 + p)^2 = p^2 - 8p + 16\frac{1}{4}$ en

$OB^2 = 2^2 + (1 + p)^2 = p^2 + 2p + 5$.

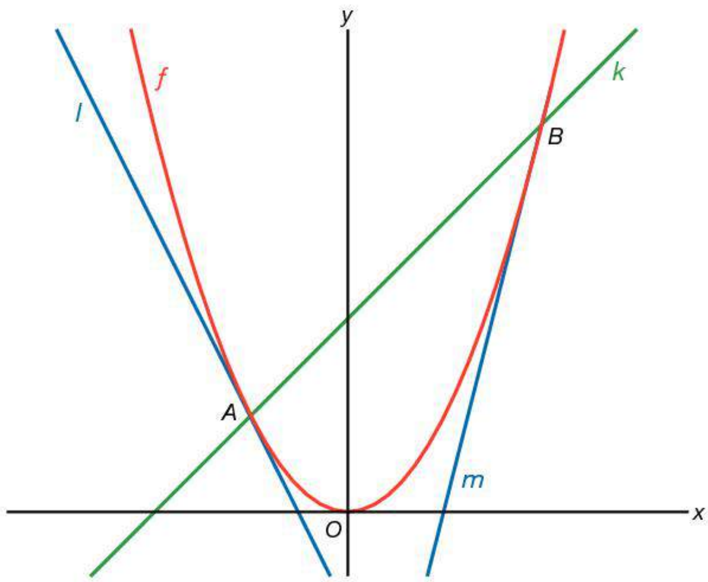
Oplossen van de vergelijking $OA = OB$ ofwel $OA^2 = OB^2$ geeft $p = 1\frac{1}{8}$.

15.2 Raakproblemen

O 18 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$ en de lijn k: $y = x + 2$. De lijn k snijdt de grafiek van f in de punten A en B. De lijn l raakt de grafiek van f in A en de lijn m raakt de grafiek van f in B. Zie figuur 15.11.

a Geef de richtingshoek van k.

b Bereken de richtingshoeken van l en m in graden nauwkeurig.



figuur 15.11

Theorie A De hoek tussen twee krommen

Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = \text{rc}_k$ met $-90° < \alpha \leq 90°$.
Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β,

waarbij $\alpha > \beta$, geldt $\begin{cases} \varphi = \alpha - \beta \text{ als } \alpha - \beta \leq 90° \\ \varphi = 180° - (\alpha - \beta) \text{ als } \alpha - \beta > 90° \end{cases}$

Om de hoek tussen een kromme en een rechte lijn te berekenen, gebruik je dat de helling van de kromme in een punt gelijk is aan de helling van de raaklijn in dat punt.

De hoek tussen de lijn k en de parabool $y = x^2$ in het punt A in opgave 18 is dus de hoek tussen k en de raaklijn l in A.

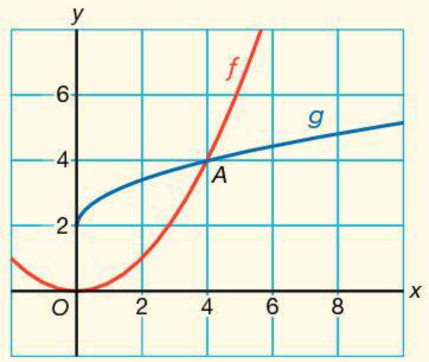
Heb je te maken met de grafieken van twee functies, dan is de hoek tussen de twee grafieken in een snijpunt gelijk aan de hoek tussen de twee raaklijnen in dat punt.
Deze afspraak geldt algemeen voor krommen.

De hoek tussen twee krommen in een snijpunt A is gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen in A.

15

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ en $g(x) = \sqrt{x} + 2$.
Bereken langs algebraïsche weg de hoek tussen de grafieken van f en g in het snijpunt $A(4, 4)$. Rond af op één decimaal.



figuur 15.12

Uitwerking

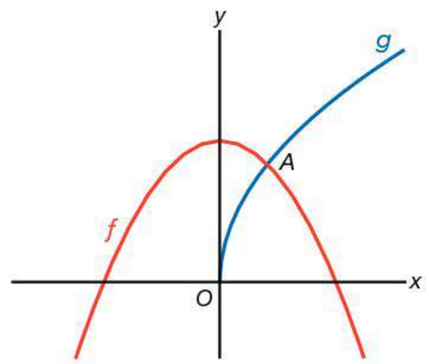
k is de raaklijn van de grafiek van f in A.
$f(x) = \frac{1}{4}x^2$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x$, dus $\text{rc}_k = f'(4) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.
l is de raaklijn van de grafiek van g in A.

$g(x) = \sqrt{x} + 2$ geeft $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, dus $\text{rc}_l = g'(4) = \dfrac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$.

$\tan(\alpha) = \text{rc}_k = 2$ geeft $\alpha = 63{,}43...°$
$\tan(\beta) = \text{rc}_l = \frac{1}{4}$ geeft $\beta = 14{,}03...°$
De gevraagde hoek is $\alpha - \beta \approx 49{,}4°$.

T 19 [►► 23] Bereken langs algebraïsche weg in graden nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = -2x + 6$ elkaar snijden.

20 Gegeven zijn de functies $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ en $g(x) = 2\frac{1}{2}\sqrt{x}$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt $A\left(1, 2\frac{1}{2}\right)$.
Zie de figuur hiernaast.
Bereken langs algebraïsche weg in één decimaal nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van f en g elkaar in A snijden.



figuur 15.13

21 Bereken langs algebraïsche weg in één decimaal nauwkeurig de hoek waaronder de grafieken van $f(x) = x^2 - 4x$ en $g(x) = x^2 - 10x + 24$ elkaar snijden.

22 Bereken langs algebraïsche weg in graden nauwkeurig de hoeken waaronder de parabolen p_1: $y = x^2$ en p_2: $y = -x^2 + 4x + 6$ elkaar snijden.

A 23 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{4x + 5}$ en $g(x) = -x^2 + 6\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$. De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten $A(1, 3)$ en $B(5, 5)$.

a Toon dit aan.

b Bereken langs algebraïsche weg in graden nauwkeurig de hoeken waaronder de grafieken van f en g elkaar snijden in de punten A en B.

A 24 Gegeven zijn de functies $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$ en $g(x) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2}$.

Bereken langs algebraïsche weg de hoek waaronder de grafieken van f en g elkaar snijden.

15

D 25 De parabool p: $y = \frac{2}{3}x^2 + x + \frac{1}{3}$ snijdt de cirkel c: $x^2 + y^2 = 5$ in de punten A en B.
Bereken in graden nauwkeurig de hoeken waaronder dit gebeurt.

O 26 Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}5x^2 + x + 1{,}5$ en $g(x) = -x^2 + 4x$.
Het punt $A(1, 3)$ ligt zowel op de grafiek van f als op de grafiek van g.

a Toon dit aan.

De lijn k raakt de grafiek van f in A en de lijn l raakt de grafiek van g in A.

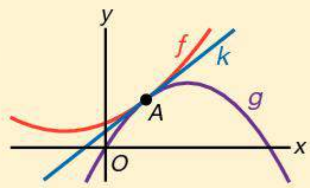
b Stel langs algebraïsche weg formules op van k en l.

c Wat voor bijzonder punt is het punt A?

Theorie B Rakende grafieken

In opgave 26 heb je gezien dat de raaklijn in A aan de grafiek van f samenvalt met de raaklijn in A aan de grafiek van g. De grafieken hebben in A een gemeenschappelijke raaklijn. De grafieken van f en g raken elkaar in A.

De grafieken van f en g raken elkaar in het punt A als de raaklijn in A aan de grafiek van f samenvalt met de raaklijn in A aan de grafiek van g.



In het raakpunt A geldt dus niet alleen $f(x_A) = g(x_A)$, maar ook $f'(x_A) = g'(x_A)$. Hiermee is de x-coördinaat van het raakpunt A te berekenen.

De grafieken van f en g raken elkaar in het punt A als de x-coördinaat van A voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$.

15

Voorbeeld

Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ en $g(x) = -x^2 + 9x - 13$.
Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar raken en bereken de coördinaten van het raakpunt.

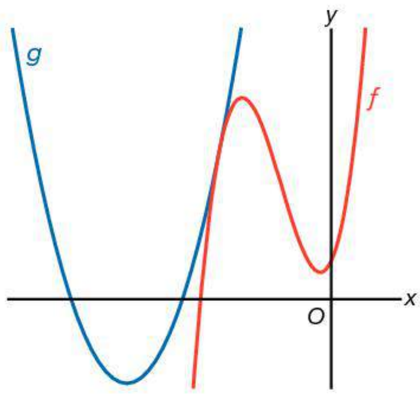
Bij de opdracht 'Bewijs' ga je exact te werk. Exact betekent stap voor stap zonder gebruik te maken van de opties van de GR.

Uitwerking

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = -x^2 + 9x - 13$ geeft $g'(x) = -2x + 9$
$f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$
$\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5 = -x^2 + 9x - 13 \ \wedge \ x^2 - 2x = -2x + 9$
$\frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 = 0 \ \wedge \ x^2 = 9$
$x^2 = 9$ geeft $x = -3 \vee x = 3$
Substitutie van $x = -3$ in $\frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 = 0$
geeft $\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - 9 \cdot -3 + 18 = 0$
$-9 + 27 + 18 = 0$ klopt niet
Substitutie van $x = 3$ in $\frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 = 0$
geeft $\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 9 \cdot 3 + 18 = 0$
$9 - 27 + 18 = 0$ klopt, dus de grafieken raken voor $x = 3$.
$f(3) = 5$, dus het raakpunt is $(3, 5)$.

R 27 Zie het voorbeeld.
Oplossen van $f'(x) = g'(x)$ geeft $x = -3 \vee x = 3$, maar $x = -3$ voldoet niet aan $f(x) = g(x)$.
Wat betekent dit voor de grafieken van f en g voor $x = -3$?

28 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ en $g(x) = x^2 + 11x + 28$.
a Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar raken.
b Stel de formule op van de gemeenschappelijke raaklijn.



figuur 15.14

29 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{2x}$ en $g_p(x) = x^2 + p$.
a Onderzoek langs algebraïsche weg of de grafieken van f en g_1 elkaar raken.
b Bereken exact voor welke p de grafieken van f en g_p elkaar raken.

30 Gegeven zijn de functies $f(x) = x - \ln(x)$ en $g_p(x) = px$.
Als de grafieken van f en g_p elkaar raken, dan geldt

$x - \ln(x) = px \wedge 1 - \frac{1}{x} = p$.

a Licht dit toe.

Uit $x - \ln(x) = px \wedge 1 - \frac{1}{x} = p$ volgt $x - \ln(x) = x - 1$.

b Toon dit aan.

c Bereken exact de waarde van p waarvoor de grafieken van f en g_p elkaar raken en bereken de coördinaten van het raakpunt.

15

31 **a** Bereken exact de waarden van p waarvoor de grafieken van $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ en $g_p(x) = x^2 + px$ elkaar raken.

b Bereken in drie decimalen nauwkeurig de waarden van p waarvoor de grafieken van $f(x) = x - e^x$ en $g_p(x) = x^2 + px$ elkaar raken.

32 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 2\ln(x) + px$ en $g_q(x) = x^2 + q$.

a Bereken exact de waarde van q waarvoor de grafieken van f_3 en g_q elkaar raken.

b Bereken in drie decimalen nauwkeurig de waarde van p waarvoor de grafieken van f_p en g_2 elkaar raken.

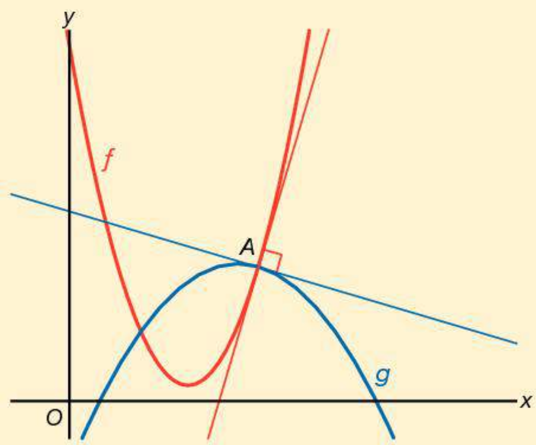
A 33 Bereken de waarde van p waarvoor de grafieken van $f_p(x) = 2x + p\ln(x)$ en $g_p(x) = px^2$ elkaar raken.

O 34 De lijn k gaat door het punt $A(4, 3)$ en staat loodrecht op de lijn l: $y = 2x + 1$.
Stel een vergelijking op van k.

Theorie C Elkaar loodrecht snijdende grafieken

Je weet dat de lijnen k en l loodrecht op elkaar staan als $rc_k \cdot rc_l = -1$.

Twee grafieken snijden elkaar loodrecht in het punt A als in dat punt de raaklijnen van de grafieken loodrecht op elkaar staan. In het punt A geldt dus niet alleen $f(x_A) = g(x_A)$, maar ook $f'(x_A) \cdot g'(x_A) = -1$. Hiermee is de x-coördinaat van het punt A te berekenen.



figuur 15.15

De grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in het punt A als de x-coördinaat van A voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$.

Voorbeeld

De grafieken van $f(x) = 2\sqrt{x}$ en $g_p(x) = \frac{p}{x}$ snijden elkaar loodrecht.
Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het punt waar de grafieken elkaar loodrecht snijden.

Uitwerking

$f(x) = 2\sqrt{x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$g_p(x) = \frac{p}{x} = px^{-1}$ geeft $g_p'(x) = -px^{-2} = -\frac{p}{x^2}$

$f(x) = g_p(x) \wedge f'(x) \cdot g_p'(x) = -1$

$2\sqrt{x} = \frac{p}{x} \wedge \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-p}{x^2} = -1$

$p = 2x\sqrt{x} \wedge \frac{p}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = 1$

$p = 2x\sqrt{x}$ substitueren in $\frac{p}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = 1$ geeft $\frac{2x\sqrt{x}}{x^2 \cdot \sqrt{x}} = 1$

$\frac{2}{x} = 1$

$x = 2$

$x = 2$ geeft $p = 4\sqrt{2}$ en $f(2) = 2\sqrt{2}$
Dus de grafieken snijden elkaar loodrecht voor $p = 4\sqrt{2}$ in het punt $(2, 2\sqrt{2})$.

35 **a** Bewijs dat de grafieken van $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 10$ elkaar loodrecht snijden.
b Onderzoek algebraïsch of de grafieken van $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x)$ en $g(x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x)$ elkaar loodrecht snijden.

36 De grafieken van $f_p(x) = p\sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{8}{x}$ snijden elkaar loodrecht.
Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van het punt waar de grafieken elkaar loodrecht snijden.

37 **a** Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de lijn k die de grafiek van f loodrecht snijdt in het punt $A(5, 5)$.
b De lijn $l: y = -5x + p$ snijdt de grafiek van $g(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$ loodrecht.
Bereken p algebraïsch.

A 38 Gegeven is de functie $f(x) = e^{1-x^2}$.

a Bereken exact de coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.

b Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke waarden van a de lijn $y = ax$ de grafiek van f loodrecht snijdt.

A 39 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - x$ en $g_p(x) = \frac{p}{x}$.

a De grafieken van f en g_p raken elkaar in het punt A. Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van A.

b De grafieken van f en g_p snijden elkaar loodrecht in het punt B. Bereken exact de waarde van p en de coördinaten van B.

15

Informatief Verticale raaklijnen

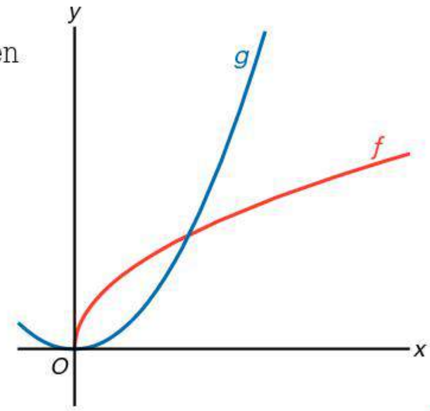
De grafiek van $f(x) = \sqrt{x}$ heeft in het beginpunt (0, 0) een verticale raaklijn. De vergelijking van deze raaklijn is $x = 0$ en deze heeft geen richtingscoëfficiënt.

De grafiek van $g(x) = x^2$ heeft in (0, 0) een horizontale raaklijn. De grafieken van f en g staan in (0, 0) dus loodrecht op elkaar.

Uit $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ volgt $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0}}$ en dus bestaat $f'(0)$ niet.

Daarom geldt hier niet $f'(0) \cdot g'(0) = -1$.

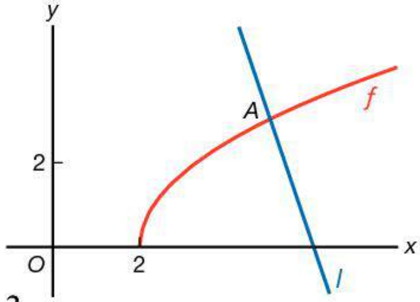
Bij loodrecht snijden waarbij één van de raaklijnen verticaal is, kun je dus niet de regel $f'(x) \cdot g'(x) = -1$ gebruiken.



Terugblik

De hoek tussen twee krommen

De hoek tussen twee krommen in een snijpunt A is gelijk aan de hoek tussen de raaklijnen in A.
Om de hoek tussen de grafiek van $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ en de lijn l: $y = -3x + 18$ in het snijpunt $A(5, 3)$ langs algebraïsche weg te berekenen, ga je als volgt te werk.



- Bereken $f'(5)$ en rc_l.

  $f(x) = \sqrt{3x - 6}$ geeft $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x - 6}}$, dus $f'(5) = \frac{1}{2}$ en $rc_l = -3$.
- Bereken de richtingshoek α van de raaklijn k in A aan de grafiek van f en de richtingshoek β van lijn l.
  $\tan(\alpha) = rc_k = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26{,}56...°$ en $\tan(\beta) = rc_l = -3$ geeft $\beta = -71{,}56...°$.
- Bereken de hoek φ tussen de lijnen k en l.
  $\alpha - \beta = 26{,}56...° - -71{,}56...° = 98{,}13...°$, dus $\varphi = 180° - 98{,}13...° \approx 81{,}9°$.

Grafieken die elkaar raken

Als de grafieken van de functies f en g in het punt A een gemeenschappelijke raaklijn hebben, dan raken de grafieken elkaar in A.
De grafieken van f en g raken elkaar in het punt A als de x-coördinaat van A voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$. Zo kun je als volgt bewijzen dat de grafieken van $f(x) = \sqrt{x + 4}$ en $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4\frac{3}{4}$ elkaar raken.

$f(x) = \sqrt{x + 4}$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 4}}$ en $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4\frac{3}{4}$ geeft $g'(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

$f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$ geeft $\sqrt{x + 4} = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4\frac{3}{4} \wedge \dfrac{1}{2\sqrt{x + 4}} = \frac{1}{2}x + 2$

Oplossen van de vergelijking $\dfrac{1}{2\sqrt{x + 4}} = \frac{1}{2}x + 2$ geeft $x = -3$.

$f(-3) = 1$ en $g(-3) = 1$, dus de grafieken van f en g raken elkaar in het punt $(-3, 1)$.

Grafieken die elkaar loodrecht snijden

De lijnen k en l staan loodrecht op elkaar als geldt $rc_k \cdot rc_l = -1$. Als het punt A op de grafieken van f en g ligt en de raaklijn aan de grafiek van f in A loodrecht staat op de raaklijn aan de grafiek van g in A, dan snijden de grafieken elkaar loodrecht in A.
De grafieken van f en g snijden elkaar loodrecht in het punt A als de x-coördinaat van A voldoet aan $f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$. Bij het berekenen van de waarde van p waarvoor de grafieken van $f(x) = x + 4$ en $g_p(x) = px^2$ elkaar loodrecht snijden, krijg je het stelsel $x + 4 = px^2 \wedge 1 \cdot 2px = -1$ en dit geeft $x = -\frac{8}{3}$ en $p = \frac{3}{16}$.
De grafieken van f en g snijden voor $p = \frac{3}{16}$ elkaar loodrecht in het punt $A\left(-2\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$.

$x + 4 = px^2 \wedge 1 \cdot 2px = -1$

$x + 4 = px^2 \wedge p = -\dfrac{1}{2x}$

$x + 4 = -\dfrac{1}{2x} \cdot x^2 \wedge p = -\dfrac{1}{2x}$

$x + 4 = -\frac{1}{2}x \wedge p = -\dfrac{1}{2x}$

$x = -\frac{8}{3} \wedge p = \frac{3}{16}$

15.3 Optimaliseringsproblemen

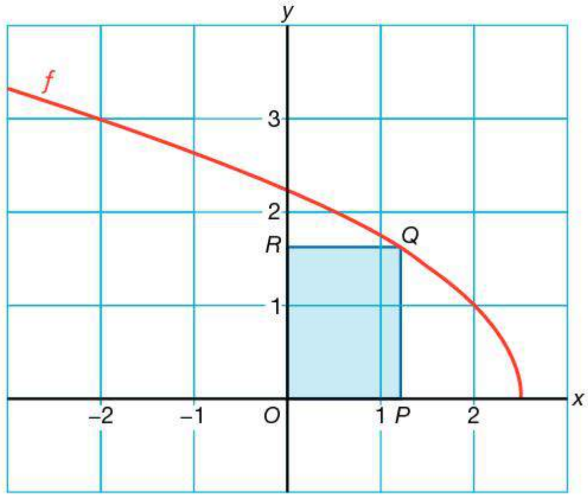
O 40 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$.
Van rechthoek $OPQR$ ligt P op de positieve x-as, Q op de grafiek van f en R op de y-as. Zie figuur 15.16.

a Neem $x_P = 1\frac{1}{2}$ en bereken exact de oppervlakte van de rechthoek.

Neem $x_P = p$. Voor de oppervlakte A van rechthoek $OPQR$ geldt $A = p\sqrt{5 - 2p}$.

b Toon aan dat de formule juist is.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de maximale waarde van A.



figuur 15.16

Theorie A Optimaliseren van oppervlakten en lengten

In opgave 40 heb je grafisch-numeriek de maximale oppervlakte van rechthoek $OPQR$ berekend.
Afhankelijk van de vraagstelling kies je de grafisch-numerieke of de algebraïsche aanpak.

Afspraak	
Vraagstelling	*Uitwerking*
Bereken (zonder nadere toevoeging)	Je bent vrij in de manier van uitwerken. Een toelichting is vereist. Bij gebruik van de GR vermeld je de ingevoerde formules en de gebruikte opties. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.
Bereken met de afgeleide Bereken met behulp van differentiëren	Bereken de formule van de afgeleide. Daarna mag je de vergelijking 'afgeleide = 0' wel grafisch-numeriek oplossen.
Bereken algebraïsch	Stap voor stap zonder gebruik te maken van opties van de GR. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.
Bereken exact	Ga algebraïsch te werk en rond niet af.
Toon aan	Geef een redenering en/of een berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
Bewijs	Geef een redenering en/of een exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.

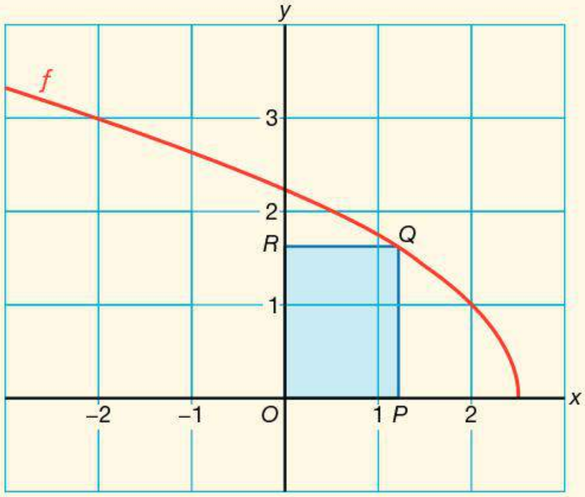
In opgaven moet je vaak de juistheid van een formule aantonen of bewijzen.
Houd je hierbij aan de volgende afspraak.

Afspraak
Bij het **aantonen** of **bewijzen** dat een formule juist is leid je stap voor stap de formule af.
Je mag je niet beperken tot het geven van een aantal getallenvoorbeelden.

15

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$.
Van rechthoek *OPQR* ligt *P* op de positieve *x*-as, *Q* op de grafiek van *f* en *R* op de *y*-as.
Bereken exact de maximale oppervlakte van rechthoek *OPQR*.



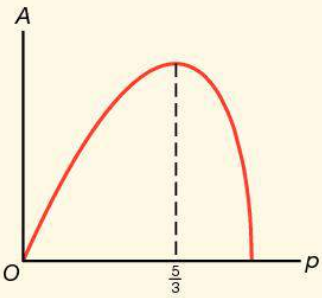
figuur 15.17

Uitwerking
Stel $x_P = p$.
De oppervlakte van *OPQR* is $A = p \cdot f(p) = p\sqrt{5 - 2p}$.

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 1 \cdot \sqrt{5-2p} + p \cdot \frac{-2}{2\sqrt{5-2p}} = \sqrt{5-2p} - \frac{p}{\sqrt{5-2p}}$$

$$= \frac{5-2p-p}{\sqrt{5-2p}} = \frac{5-3p}{\sqrt{5-2p}}$$

$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $5 - 3p = 0$
$-3p = -5$
$p = \frac{5}{3}$



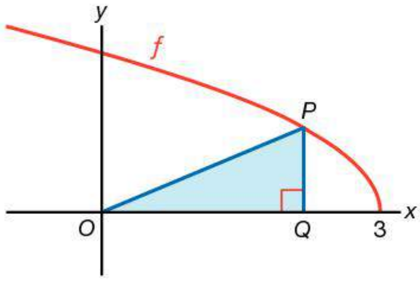
De maximale oppervlakte is $\frac{5}{3}\sqrt{5 - 2 \cdot \frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} = \frac{5}{9}\sqrt{15}$.

41 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{3 - x}$.
Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = p$ en $0 < p < 3$. Het punt Q is de loodrechte projectie van P op de x-as.
Voor de oppervlakte A van $\triangle OPQ$ geldt $A = \frac{1}{2}p\sqrt{3 - p}$.

a Bewijs dat deze formule juist is.
b Bewijs dat $\frac{dA}{dp} = \frac{6 - 3p}{4\sqrt{3 - p}}$.
c Bereken exact de maximale oppervlakte van $\triangle OPQ$.

Voor de lengte L van het lijnstuk OP geldt $L = \sqrt{p^2 - p + 3}$.

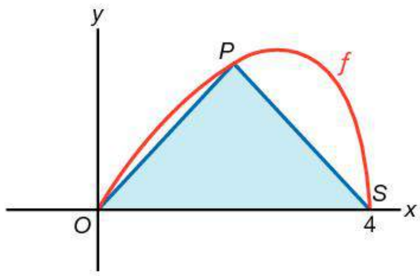
d Bewijs dat deze formule juist is.
e Bereken exact de minimale lengte van OP.



figuur 15.18 $f(x) = \sqrt{3 - x}$

42 Gegeven is de functie $f(x) = x\sqrt{8 - 2x}$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de punten O en S.
Van driehoek OSP ligt het punt P met $0 < x_P < 4$ op de grafiek van f. Zie figuur 15.19.
Stel $x_P = p$.

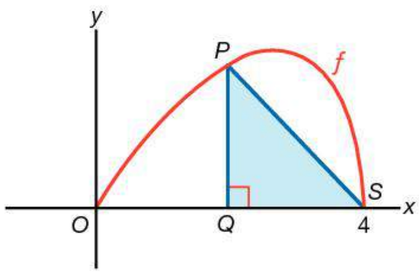
a Bereken exact de maximale waarde van de oppervlakte van $\triangle OSP$.



figuur 15.19 $f(x) = x\sqrt{8 - 2x}$

Zie figuur 15.20 met de rechthoekige driehoek QSP.
Voor de oppervlakte A van driehoek QSP geldt de formule $A = \left(2p - \frac{1}{2}p^2\right)\sqrt{8 - 2p}$.

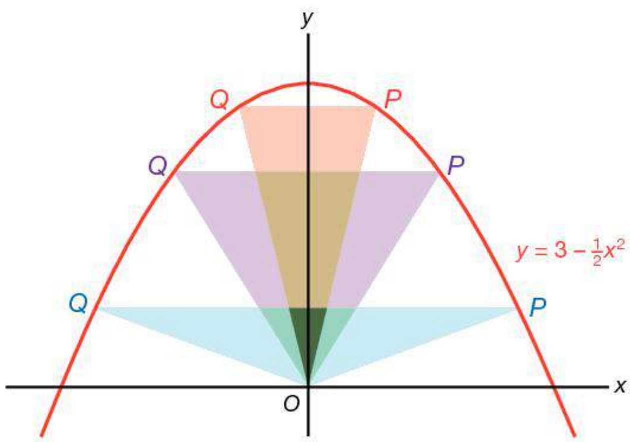
b Bewijs dat deze formule juist is.
c Bewijs dat $\frac{dA}{dp} = \frac{5p^2 - 28p + 32}{2\sqrt{8 - 2p}}$.
d Bereken algebraïsch de maximale oppervlakte van $\triangle QSP$. Rond het antwoord af op twee decimalen.



figuur 15.20 $f(x) = x\sqrt{8 - 2x}$

A 43 Gegeven is de parabool $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$ met daarop de punten P en Q. Hierbij is $y_P = y_Q$ en $y_P > 0$. Zie figuur 15.21.
Stel $x_P = p$.

a Druk de oppervlakte A van $\triangle OPQ$ uit in p.
b Bereken exact de maximale oppervlakte van $\triangle OPQ$.
c Bereken exact de minimale lengte van het lijnstuk OP.

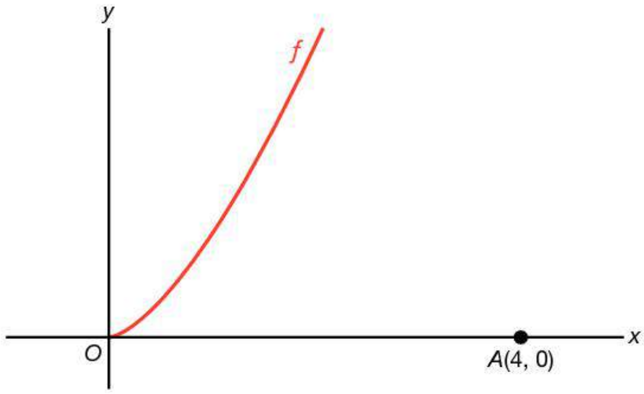


figuur 15.21

A 44 In figuur 15.22 zie je de grafiek van $f(x) = x\sqrt{x}$. We vragen ons af welk punt van de grafiek van f het dichtst bij het punt $A(4, 0)$ ligt.
Kies op de grafiek het punt P met $x_P = p$.
Voor de lengte van het lijnstuk AP geldt

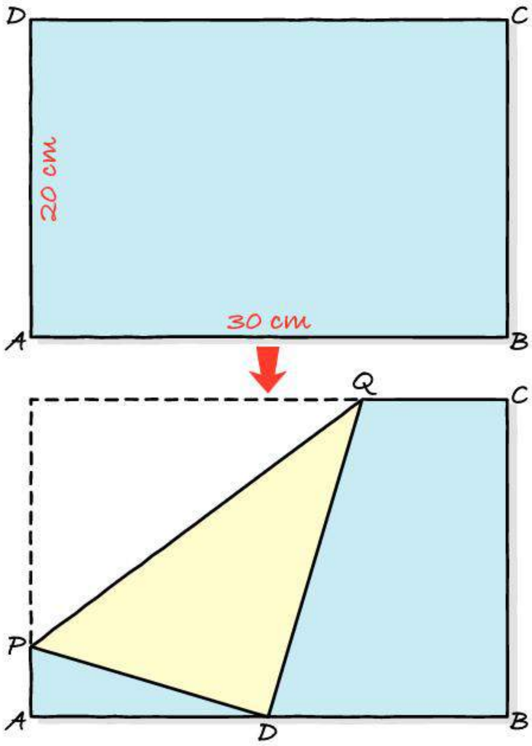
$$AP = \sqrt{p^3 + p^2 - 8p + 16}.$$

a Bewijs dit.
b Bereken exact de coördinaten van het punt op de grafiek dat het dichtst bij A ligt.



figuur 15.22

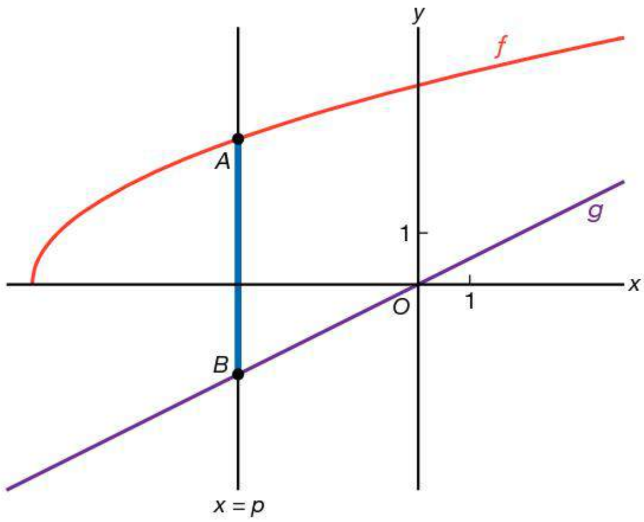
D 45 Bij een velletje papier van 20 bij 30 cm wordt een hoekpunt zo omgevouwen, dat het op een lange zijde van het papier komt. Zie figuur 15.23.
Bereken met behulp van differentiëren de maximale oppervlakte van driehoek ADP in twee decimalen nauwkeurig.



figuur 15.23

O 46 In figuur 15.24 zijn de grafieken van de functies $f(x) = \sqrt{2x + 15}$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$ getekend. De verticale lijn $x = p$ met $-7\frac{1}{2} \leq p \leq 0$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B. De lengte van het lijnstuk AB noemen we L.
a Bereken L voor $p = -3$.

De formule van L is $L = \sqrt{2p + 15} - \frac{1}{2}p$.
b Licht dit toe.
c Bereken voor welke p de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.



figuur 15.24

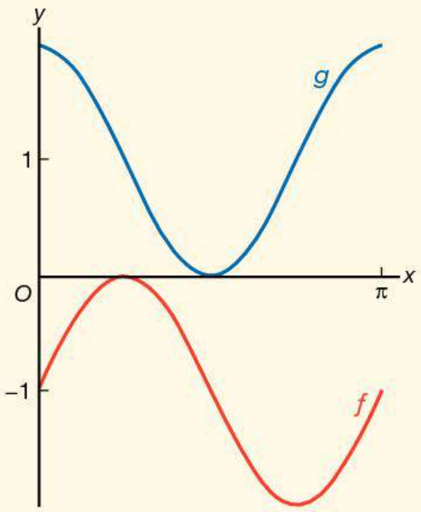
Theorie B Verticale afstanden bij grafieken

Om de maximale of minimale lengte van een verticaal lijnstuk tussen twee grafieken te berekenen, stel je eerst een formule van die lengte op. Hiervoor heb je een schets van de grafieken nodig om te zien welke de bovenste grafiek is. Na het opstellen van de formule van de lengte kun je deze maximaliseren of minimaliseren.

Voorbeeld

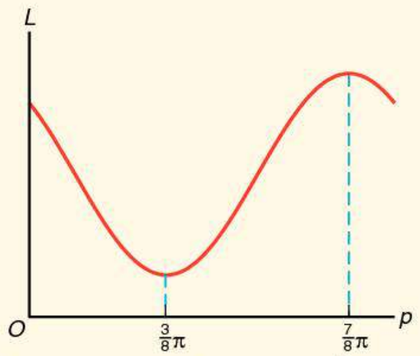
Gegeven zijn de functies $f(x) = \sin(2x) - 1$ en $g(x) = 2\cos^2(x)$, beide met domein $[0, \pi]$.
De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken exact voor welke p de lengte L van het lijnstuk AB maximaal is.

Uitwerking



$$L = g(p) - f(p) = 2\cos^2(p) - (\sin(2p) - 1)$$
$$= 2\cos^2(p) - \sin(2p) + 1$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 4\cos(p) \cdot -\sin(p) - 2\cos(2p)$$
$$= -4\sin(p)\cos(p) - 2\cos(2p)$$
$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0 \text{ geeft } -4\sin(p)\cos(p) - 2\cos(2p) = 0$$
$$2\sin(p)\cos(p) = -\cos(2p)$$
$$\sin(2p) = -\cos(2p)$$
$$\tan(2p) = -1$$
$$2p = \tfrac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$
$$p = \tfrac{3}{8}\pi + k \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$

p op $[0, \pi]$ geeft $p = \frac{3}{8}\pi \vee p = \frac{7}{8}\pi$



L is maximaal voor $p = \frac{7}{8}\pi$.

47 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{6x + 12}$ en $g(x) = x + 2$.
De lijn $x = p$ met $-2 < p < 4$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Voor de lengte L van het lijnstuk AB geldt de formule $L = \sqrt{6p + 12} - p - 2$.
a Toon aan dat deze formule juist is.
b Bereken exact de maximale waarde van L.

48 Gegeven zijn de functies $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ en $g(x) = \cos(x) - 1\frac{1}{2}$, beide met domein $[0, 2\pi]$.
De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk AB.

A 49 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(2x + 5)$ en $g(x) = \frac{1}{2}x$.
De snijpunten van de grafieken zijn A en B met $x_A < x_B$.
De lijn $x = p$ met $x_A < p < x_B$ snijdt de grafieken in de punten C en D.
Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk CD.

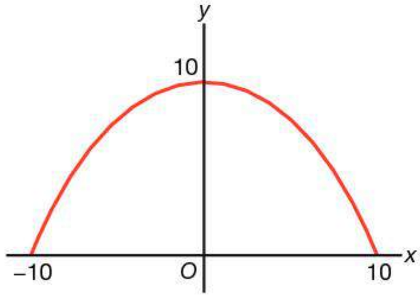
A 50 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5x\,e^x$ en $g(x) = 5x^2\,e^x$.
a Bereken exact het bereik van f.
b Bereken exact de extreme waarden van g.
c De lijn $x = p$ met $p < 0$ snijdt de grafiek van f in het punt A en de grafiek van g in het punt B.
Bereken exact de waarde van p waarvoor de lengte van het lijnstuk AB maximaal is.
d De lijn $x = q$ met $0 < q < 1$ snijdt de grafiek van f in het punt C en de grafiek van g in het punt D.
Bereken in drie decimalen nauwkeurig de maximale lengte van het lijnstuk CD.

De Nederlandse architect Rob van Hove bedacht in samenwerking met de TU Eindhoven een innovatieve technologie om met de kettinglijntheorie een bouwwerk te maken. Het kantoorpand in Schijndel hierboven is het eerste gebouw in Nederland dat gebouwd is met deze techniek.

D 51 In een kettingboog treden alleen maar drukkrachten op. De algemene formule voor een kettingboog die symmetrisch is in de y-as is $y_k = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{1}{a}x} + e^{-\frac{1}{a}x}\right) + b$.

Men wil een kettingboog maken zoals in figuur 15.25. Hierin zijn x en y in meter. Deze kettingboog snijdt de x-as in de punten $(-10, 0)$ en $(10, 0)$ en de y-as in het punt $(0, 10)$. Hieruit volgt dat in twee decimalen nauwkeurig geldt dat $a = -6{,}19$ en $b = 16{,}19$.

a Bereken a en b in drie decimalen nauwkeurig.



figuur 15.25

De kettingboog lijkt op een parabool. Zo dacht bijvoorbeeld Galileo Galilei dat een kettingboog een parabool was. Maar Christiaan Huygens toonde in 1646 aan dat dit niet juist kon zijn. Je kunt onderzoeken hoeveel de parabool met top $(0, 10)$ die de x-as snijdt in de punten $(-10, 0)$ en $(10, 0)$ afwijkt van de kettingboog k. De algemene formule voor deze parabool is $y_p = mx^2 + n$.

b Bereken in cm nauwkeurig het maximale verschil tussen y_k en y_p.

O 52 Van zeshoek $ABCDEF$ in figuur 15.26 is $AB = DE = 6$, $BC = CD = EF = AF = 4$, $AB \,//\, CF \,//\, DE$ en $\angle CFE = \alpha$.

a Toon aan dat $AE = 8\sin(\alpha)$.

b Toon aan dat $O(\triangle AEF) = 16\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

c Toon aan dat $O(ABDE) = 48\sin(\alpha)$.

d Toon aan dat $O(ABCDEF) = 16\sin(2\alpha) + 48\sin(\alpha)$.

figuur 15.26 De oppervlakte van zeshoek *ABCDEF* hangt af van *α*.

Geschiedenis Christiaan Huygens

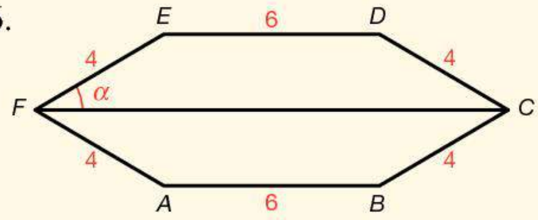
Christiaan Huyens (1629-1695) was een van de leidende figuren van de zeventiende-eeuwse wetenschap. Op negenjarige leeftijd sprak hij al Latijn. Daarnaast heeft hij bijgedragen aan de wis- en natuurwetenschappen, was hij uitvinder van beroep en auteur van vroege sciencefiction.
Zijn eerste wiskundige publicaties gaan over berekeningen met betrekking tot kegelsneden, cirkels en raaklijnen aan grafieken. Door contacten van zijn vader heeft Huygens zich ook bezig gehouden met de kettinglijn (het probleem van de vorm van een touw, opgehangen aan zijn beide uiteinden). Hij weerlegde op zeventienjarige leeftijd de beweringen van onder andere Galilei dat een kettinglijn een parabool was.

Theorie C Optimaliseren bij goniometrische modellen

Bij het berekenen van een extreme waarde van een goniometrische formule met behulp van differentiëren is het nodig dat in de formule de hoek is uitgedrukt in radialen. Immers bij het bewijs dat $[\sin(x)]' = \cos(x)$ is gebruikt dat x in radialen is.

Voorbeeld

Hiernaast zie je nogmaals de zeshoek van figuur 15.26.
De oppervlakte van de zeshoek is
$A = 16\sin(2\alpha) + 48\sin(\alpha)$ met α in radialen en
$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$.
Bereken algebraïsch in graden nauwkeurig bij welke hoek de oppervlakte van de zeshoek maximaal is.



figuur 15.27

Uitwerking

$A = 16\sin(2\alpha) + 48\sin(\alpha)$ geeft $\frac{dA}{d\alpha} = 32\cos(2\alpha) + 48\cos(\alpha)$

$\frac{dA}{d\alpha} = 0$ geeft $32\cos(2\alpha) + 48\cos(\alpha) = 0$

$2\cos(2\alpha) + 3\cos(\alpha) = 0$

$2(2\cos^2(\alpha) - 1) + 3\cos(\alpha) = 0$

$4\cos^2(\alpha) + 3\cos(\alpha) - 2 = 0$

Stel $\cos(\alpha) = u$.

$4u^2 + 3u - 2 = 0$

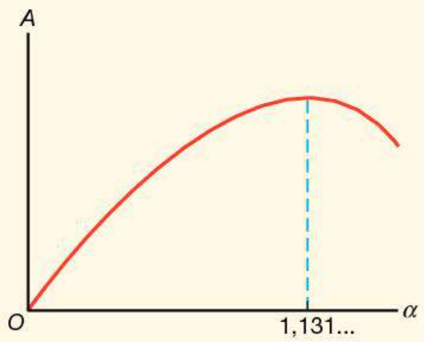
$D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot -2 = 41$

$u = \frac{-3 - \sqrt{41}}{8} = -1{,}175... \vee u = \frac{-3 + \sqrt{41}}{8} = 0{,}425...$

$\cos(\alpha) = -1{,}175... \vee \cos(\alpha) = 0{,}425...$

geen opl. $\qquad \alpha = 1{,}131... + k \cdot 2\pi \vee \alpha = -1{,}131... + k \cdot 2\pi$

α op $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ geeft $\alpha = 1{,}131...$

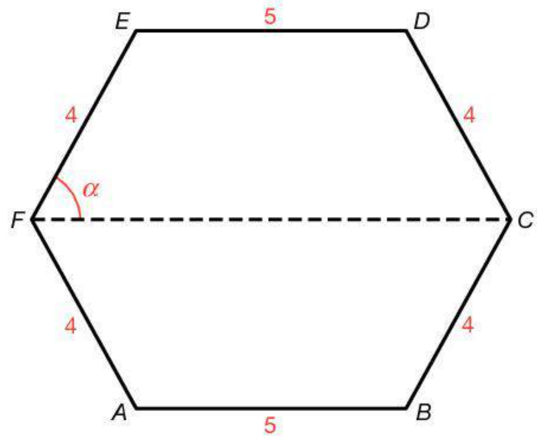


De oppervlakte is maximaal bij een hoek van $1{,}131... \cdot \frac{180°}{\pi} \approx 65°$.

53 Van de zeshoek $ABCDEF$ in figuur 15.28 is $AB = DE = 5$, $BC = CD = EF = AF = 4$ en $AB \mathbin{/\!/} CF \mathbin{/\!/} DE$.
Stel $\angle CFE = \alpha$ rad.

a Stel de formule op van de oppervlakte A van de zeshoek.

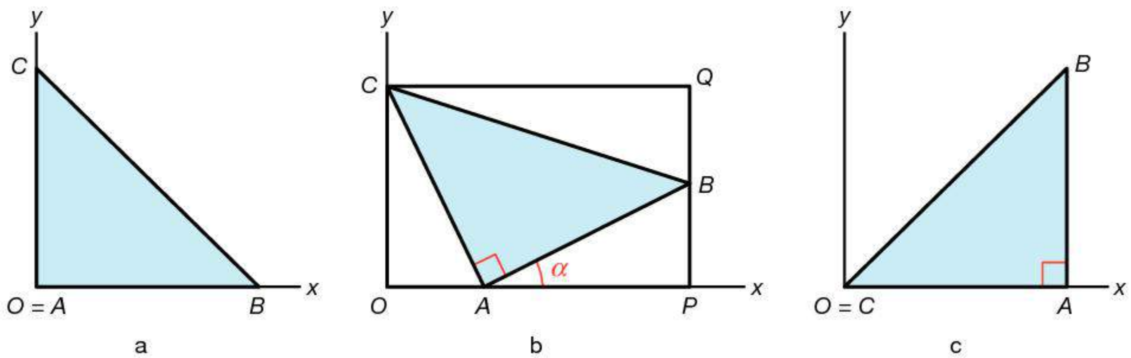
b Bereken algebraïsch in graden nauwkeurig voor welke α de oppervlakte van de zeshoek maximaal is.



figuur 15.28 De oppervlakte van de zeshoek hangt af van α.

15

54 Gegeven is de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC met $\angle A = 90°$ en $AB = AC = 1$.
De driehoek wordt in een assenstelsel geplaatst zo, dat het punt A in O terecht komt en AB langs de positieve x-as valt. Zie figuur 15.29a.



figuur 15.29

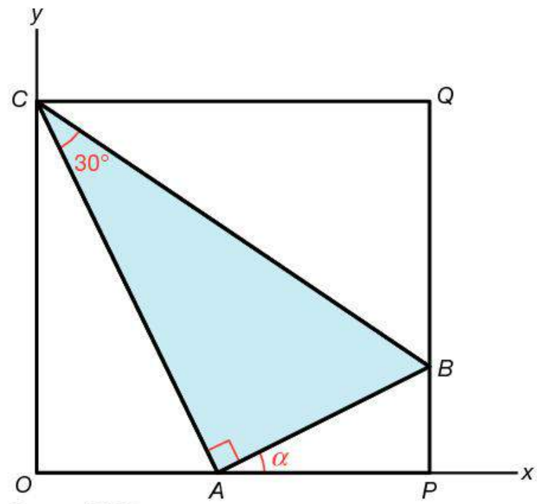
Daarna wordt het punt A verschoven langs de positieve x-as. Daarbij blijft het punt C op de positieve y-as. In figuur 15.29b zie je een tussenstand en in figuur 15.29c is de eindstand getekend.
In figuur 15.29b is de hoek die AB met de positieve x-as maakt aangegeven met α. Bovendien is de rechthoek $OPQC$ getekend. Daarbij ligt P op de x-as en B op PQ.
Voor de oppervlakte V van rechthoek $OPQC$ geldt $V = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \cos^2(\alpha)$.

a Bewijs dat deze formule juist is.

b Bereken exact voor welke α de oppervlakte van de rechthoek $OPQC$ maximaal is.

A 55 Gegeven is driehoek ABC met $\angle A = 90°$, $AB = 1$ en $BC = 2$. De driehoek wordt in een assenstelsel geplaatst zo, dat het punt A in O terecht komt en AB langs de positieve x-as valt. Daarna wordt A langs de positieve x-as naar rechts verschoven, waarbij C op de positieve y-as blijft. Zie figuur 15.30.
Bovendien is rechthoek $OPQC$ getekend, waarbij P op de x-as ligt en B op PQ. De hoek die AB met de positieve x-as maakt geven we aan met α.
Voor de oppervlakte V van rechthoek $OPQC$ geldt $V = 1\frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \sqrt{3} \cdot \cos^2(\alpha)$.

a Bewijs dat deze formule juist is.
b Bereken exact voor welke waarde van α de oppervlakte van rechthoek $OPQC$ maximaal is.

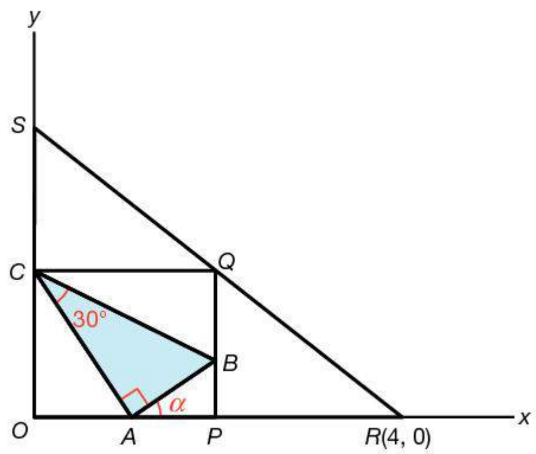


figuur 15.30

In figuur 15.31 is bovendien het punt $R(4, 0)$ getekend. De lijn RQ snijdt de y-as in het punt S.

Er geldt $OS = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot \cos(\alpha)}{4 - \sqrt{3} \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$.

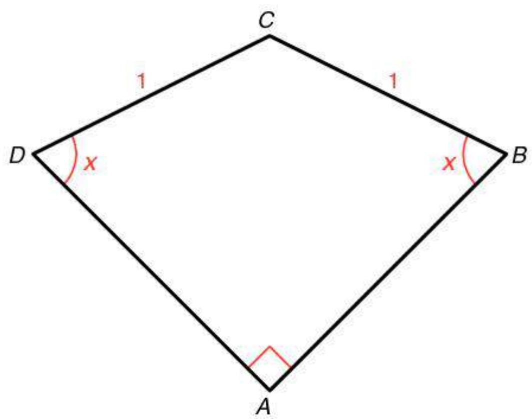
c Bewijs dat deze formule juist is.
d Bereken met de afgeleide voor welke waarde van α de lengte van het lijnstuk OS maximaal is. Geef het antwoord in gehele graden nauwkeurig.



figuur 15.31

A 56 Gegeven is de symmetrische vierhoek $ABCD$ met $\angle A = \frac{1}{2}\pi$ rad, $AB = AD$ en $BC = CD = 1$. Zie figuur 15.32.
De oppervlakte A van vierhoek $ABCD$ hangt af van $\angle B = x$ rad.
Voor de oppervlakte A van vierhoek $ABCD$ geldt $A = \sin^2(x) + \sin(x)\cos(x)$.

a Bewijs dat deze formule juist is. Gebruik een hulplijn door C loodrecht op AD.
b Bereken exact voor welke waarde van x de oppervlakte van de vierhoek maximaal is.

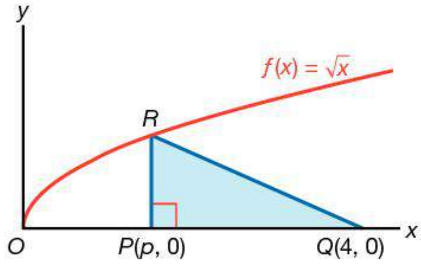


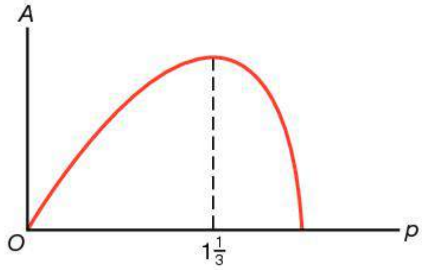
figuur 15.32

Terugblik

Oppervlakten bij grafieken

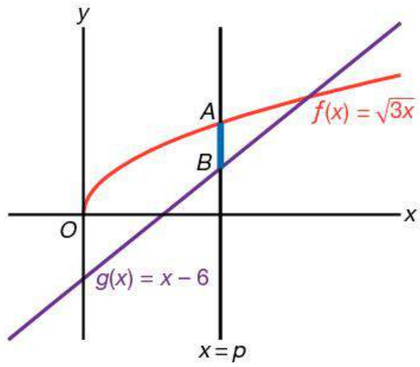
Bij het maximaliseren van de oppervlakte van een driehoek of een rechthoek waarvan één of meer hoekpunten op de grafiek van een functie liggen, stel je eerst de formule op die bij de oppervlakte hoort.
Zo hoort bij de oppervlakte A van de rechthoekige driehoek PQR hiernaast de formule $A = \frac{1}{2}(4-p)\sqrt{p} = \left(2 - \frac{1}{2}p\right)\sqrt{p}$.
Bij het exact berekenen van het maximum van A ga je algebraïsch te werk en rond je niet af.
$\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $\frac{4-3p}{4\sqrt{p}} = 0$, dus $p = 1\frac{1}{3}$.
Uit de schets van A blijkt dat er sprake is van een maximum.
De maximale waarde van A is $\frac{8}{9}\sqrt{3}$ voor $p = 1\frac{1}{3}$.

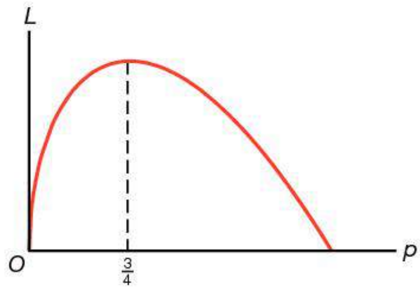




Afstanden bij grafieken

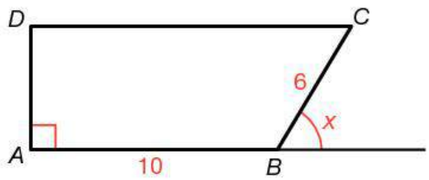
Snijdt de lijn $x = p$ de grafieken van f en g in de punten A en B, dan is de lengte L van AB uit te drukken in p.
Je krijgt $L = f(p) - g(p)$ of $L = g(p) - f(p)$.
Zo hoort bij de lengte L van het lijnstuk AB in de figuur hiernaast de formule $L = \sqrt{3p} - p + 6$.
Bij het algebraïsch berekenen van de maximale lengte van L krijg je $\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $\frac{3 - 2\sqrt{3p}}{2\sqrt{3p}} = 0$ en dit geeft $p = \frac{3}{4}$.
Uit de schets van L blijkt dat er sprake is van een maximum.
De maximale waarde van L is $\sqrt{3 \cdot \frac{3}{4}} - \frac{3}{4} + 6 = 6\frac{3}{4}$.

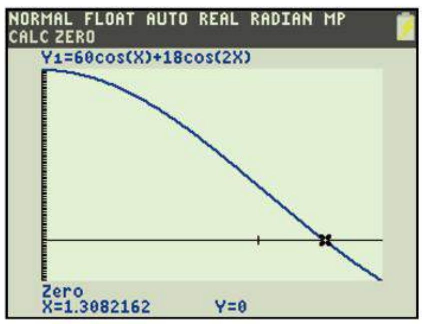




Optimaliseren bij goniometrische formules

In situaties waarbij een hoek kan variëren, krijg je met goniometrische formules te maken. Zo is de oppervlakte A van het rechthoekig trapezium $ABCD$ in de figuur hiernaast een functie van x. Hierbij beperken we ons tot scherpe hoeken x.
De bijbehorende formule is $A = 60\sin(x) + 18\sin(x)\cos(x)$.
De hoek waarbij de oppervlakte van het trapezium maximaal is, is met de afgeleide te berekenen.
$A = 60\sin(x) + 18\sin(x)\cos(x) = 60\sin(x) + 9\sin(2x)$ met x in radialen geeft $\frac{dA}{dx} = 60\cos(x) + 18\cos(2x)$.
$\frac{dA}{dx} = 0$ met x op $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ geeft $x \approx 1{,}308$.
De oppervlakte is maximaal voor $x \approx 1{,}308$ rad ofwel bij een hoek van ongeveer 75°.





15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud

O 57 Gegeven is de functie $f(x) = 2 + \frac{5}{2x-1}$.

Het functievoorschrift van f is te schrijven als $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$.

a Bewijs dit.

b Bereken exact $\int_1^3 \frac{4x+3}{2x-1}\,dx$.

15

Theorie A Integralen bij eerstegraads gebroken functies

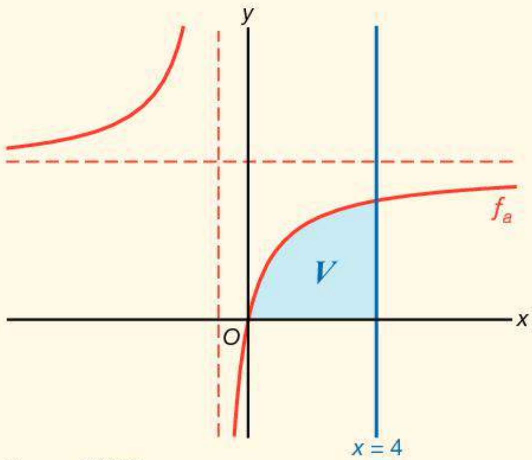
Om de functie $f(x) = \frac{3x+4}{2x+1}$ te primitiveren schrijf je het functievoorschrift van f in de vorm $f(x) = a + \frac{b}{2x+1}$.

Je krijgt $f(x) = \frac{3x+4}{2x+1} = \frac{1\frac{1}{2}(2x+1) - 1\frac{1}{2} + 4}{2x+1} = 1\frac{1}{2} + \frac{2\frac{1}{2}}{2x+1}$,

dus $F(x) = 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c = 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}\ln|2x+1| + c$.

Voorbeeld

Voor elke $a > 0$ is gegeven de functie $f_a(x) = \frac{ax}{x+1}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_a, de x-as en de lijn $x = 4$. Zie figuur 15.33.
Bereken exact voor welke a de oppervlakte van V gelijk is aan 10.



figuur 15.33

Uitwerking

$f_a(x) = \frac{ax}{x+1} = \frac{a(x+1) - a}{x+1} = a - \frac{a}{x+1}$

$O(V) = \int_0^4 f_a(x)\,dx = \int_0^4 \left(a - \frac{a}{x+1}\right)dx$

$= \left[ax - a\ln|x+1|\right]_0^4 = 4a - a\ln(5)$

$O(V) = 10$ geeft $4a - a\ln(5) = 10$

$a(4 - \ln(5)) = 10$

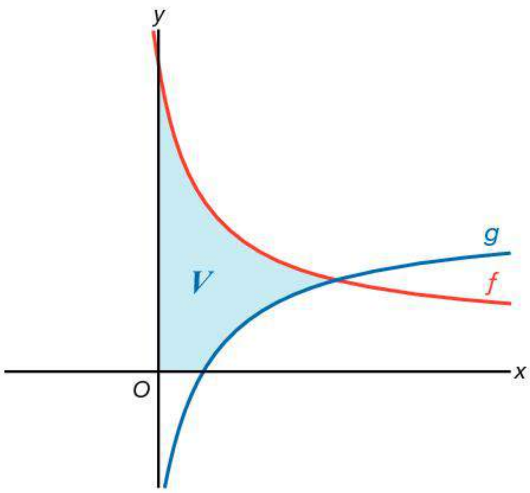
$a = \frac{10}{4 - \ln(5)}$

58 Primitiveer.

a $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ **c** $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$ **e** $f(x) = \dfrac{3-4x}{2x+1}$

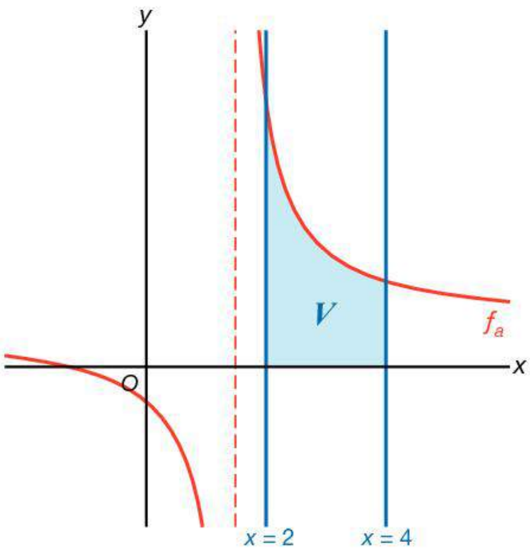
b $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ **d** $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$ **f** $f(x) = \dfrac{6x-1}{1-2x}$

59 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{x+8}{x+1}$ en $g(x) = \dfrac{4x-4}{x+1}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g, de x-as en de y-as.
Bereken exact de oppervlakte van V.



figuur 15.34

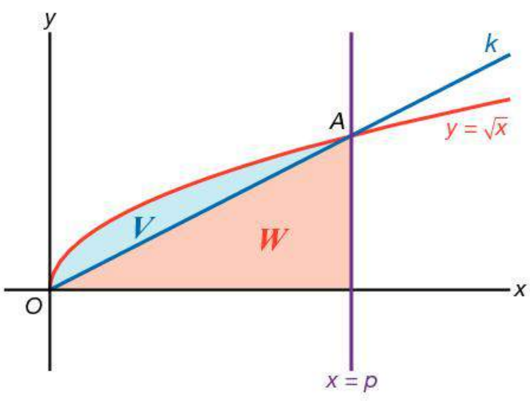
A 60 Voor elke $a > 0$ is gegeven de functie $f_a(x) = \dfrac{ax+4}{2x-3}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_a, de x-as en de lijnen $x = 2$ en $x = 4$. Zie figuur 15.35.
Bereken met behulp van primitiveren voor welke waarde van a de oppervlakte van V gelijk is aan 10.
Rond af op twee decimalen.



figuur 15.35

O 61 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{x}$. De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A. De lijn k is de lijn door O en A. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f en k. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de lijnen k, $x = p$ en de x-as. Zie figuur 15.36.
Voor de oppervlakte $O(V + W)$ van de vlakdelen V en W geldt $O(V + W) = \frac{2}{3}p\sqrt{p}$.

a Bewijs dit.
b Druk de oppervlakte $O(W)$ van het vlakdeel W uit in p.
c Druk de oppervlakte $O(V)$ van het vlakdeel V uit in p.
d Bewijs dat geldt $O(V) : O(W) = 1 : 3$.



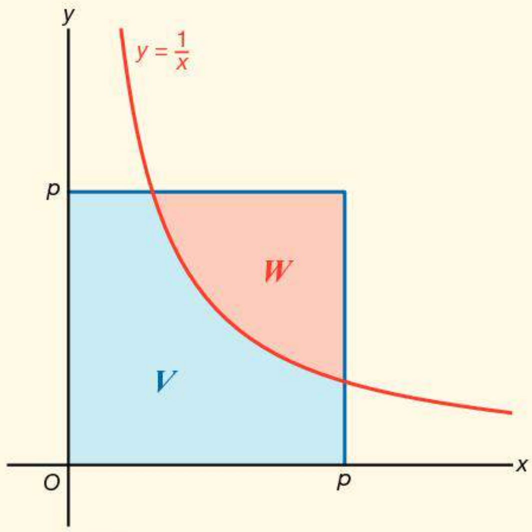
figuur 15.36

Theorie B Verhouding van oppervlakten

In opgave 61 is de verhouding van de oppervlakten van de vlakdelen V en W onafhankelijk van de waarde van p.
In het voorbeeld zoeken we een waarde van p zo, dat twee oppervlakten zich verhouden als 1 : 2.

Voorbeeld

In figuur 15.37 is een vierkant met zijde p, met $p > 1$, getekend waarvan een hoekpunt in de oorsprong ligt en twee zijden langs de assen vallen. De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x}$ verdeelt het vierkant in de vlakdelen V en W.
Bereken met behulp van primitiveren de waarde van p zo, dat $O(W) : O(V) = 1 : 2$. Rond af op twee decimalen.



figuur 15.37

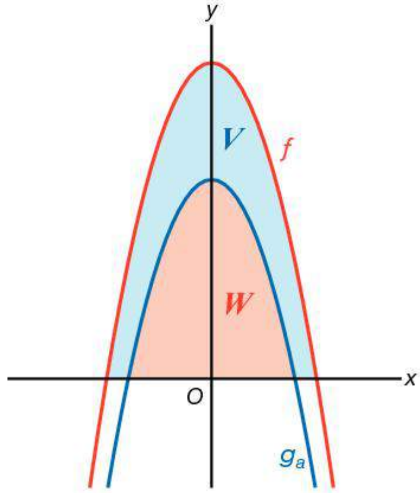
Uitwerking
De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt $\left(\frac{1}{p}, p\right)$.

$$O(V) = \frac{1}{p} \cdot p + \int_{\frac{1}{p}}^{p} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \left[\ln|x|\right]_{\frac{1}{p}}^{p} = 1 + \ln(p) - \ln\left(\frac{1}{p}\right)$$
$$= 1 + \ln(p) - \ln(p^{-1}) = 1 + \ln(p) + \ln(p) = 1 + 2\ln(p)$$

$O(V + W) = p^2$
$O(W) : O(V) = 1 : 2$, dus $O(V) = \frac{2}{3}O(V + W)$.
Dit geeft $1 + 2\ln(p) = \frac{2}{3}p^2$.
Voer in $y_1 = 1 + 2\ln(x)$ en $y_2 = \frac{2}{3}x^2$.
Intersect geeft $x \approx 0{,}72$ en $x \approx 1{,}81$.
$p \approx 0{,}72$ voldoet niet, dus $p \approx 1{,}81$.

62 Zie het voorbeeld.
Bereken p zo, dat $O(V) = O(W)$. Rond af op twee decimalen.

63 Gegeven zijn de functies $f(x) = 9 - x^2$ en $g_a = a - x^2$ met $0 < a < 9$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g_a en de x-as. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van g_a en de x-as. Zie figuur 15.38.
Bereken exact voor welke a geldt $O(V) = O(W)$.

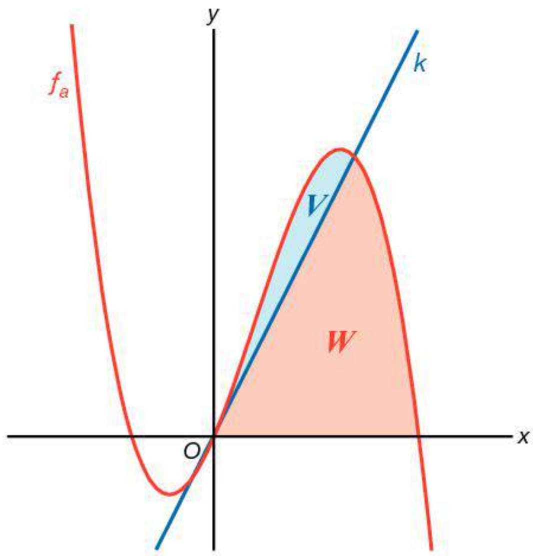


figuur 15.38

64 Voor elke $a > 0$ is gegeven de functie $f_a(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax$. De lijn k raakt de grafiek van f_a in de oorsprong en verdeelt het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_a en de positieve x-as in de vlakdelen V en W. Zie figuur 15.39.

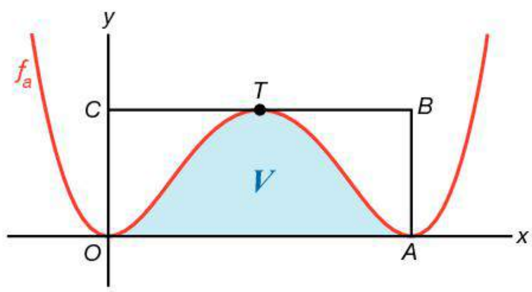
a Neem $a = 3\frac{1}{3}$ bereken exact de oppervlakte van W.

b Bewijs dat de oppervlakte van V onafhankelijk is van a.



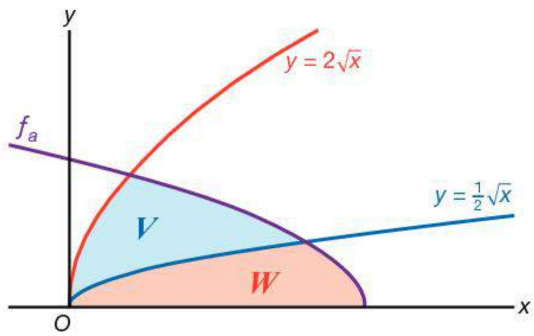
figuur 15.39

A 65 Voor elke $a > 0$ is gegeven de functie $f_a(x) = \frac{1}{4}x^2(x - a)^2$. De gemeenschappelijke punten van de grafiek van f_a met de x-as zijn $O(0, 0)$ en $A(a, 0)$. De top T van de grafiek van f_a ligt op de zijde BC van de rechthoek $OABC$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_a en de x-as. Zie figuur 15.40.
Bewijs dat de verhouding van de oppervlakte van V en de oppervlakte van de rechthoek $OABC$ onafhankelijk is van a en bereken deze verhouding.



figuur 15.40

A 66 Voor elke $a > 1$ is gegeven de functie $f_a(x) = \sqrt{a - x}$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f_a en de krommen $y = 2\sqrt{x}$ en $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f_a, de kromme $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ en de x-as. Zie figuur 15.41.
Bewijs dat voor elke $a > 1$ geldt dat $O(V) = O(W)$.



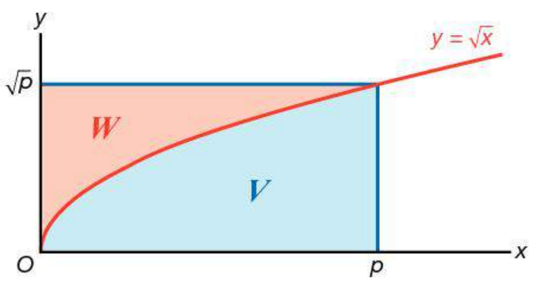
figuur 15.41

O 67 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $y = \sqrt{x}$, de x-as en de lijn $x = p$. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van $y = \sqrt{x}$, de y-as en de lijn $y = \sqrt{p}$. Zie figuur 15.42. Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as. Het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y-as.

a Bewijs dat $I(L) = \frac{1}{2}\pi p^2$.

b Bewijs dat $I(M) = \frac{1}{5}\pi p^2 \cdot \sqrt{p}$.

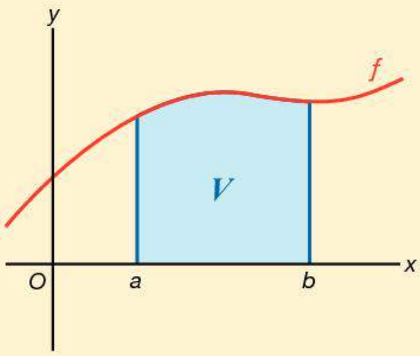
c Bereken exact voor welke p geldt dat $I(L) = I(M)$.



figuur 15.42

Theorie C Wentelen om de *x*-as en om de *y*-as

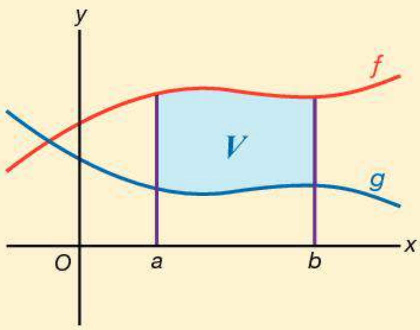
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 15.43 om de x-as wentelt is $I(L) = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$.



figuur 15.43

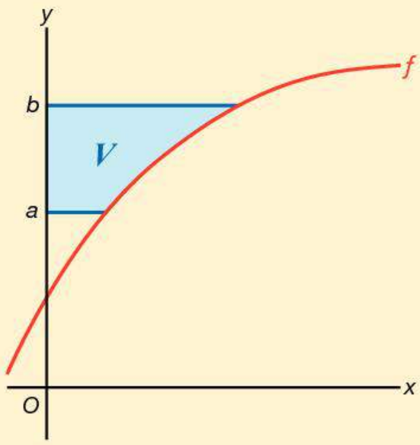
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 15.44 om de x-as wentelt is

$$I(L) = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) \, dx.$$



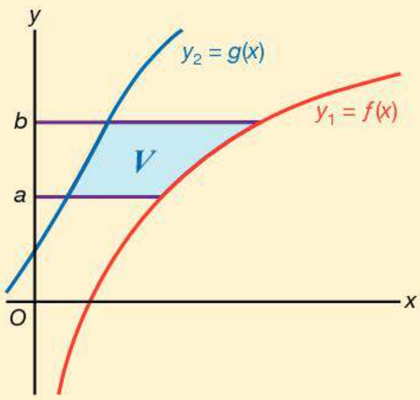
figuur 15.44

De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 15.45 om de y-as wentelt is $I(L) = \pi \int_a^b x^2 \, dy$.



figuur 15.45

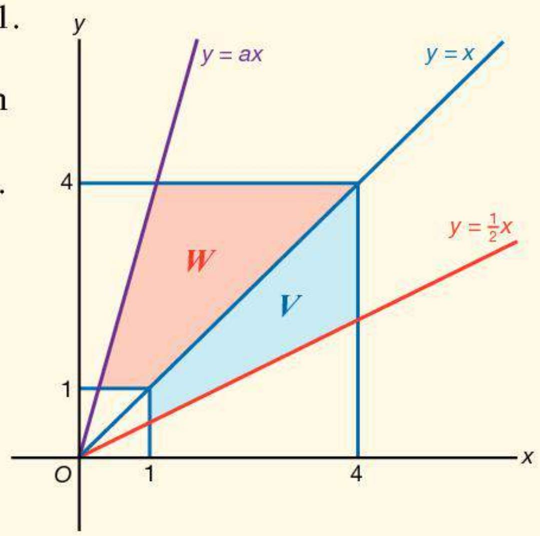
De inhoud van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V in figuur 15.46 om de y-as wentelt is $I(L) = \pi \int_a^b ((x_1)^2 - (x_2)^2) \, dy$.



figuur 15.46

Voorbeeld

Gegeven zijn de lijnen $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$ en $y = ax$ met $a > 1$. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de lijnen $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$, $x = 1$ en $x = 4$. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de lijnen $y = x$, $y = ax$, $y = 1$ en $y = 4$. Zie figuur 15.47. Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as. Het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y-as. Bereken exact voor welke waarde van a geldt $I(M) = 1\frac{1}{5}I(L)$.



figuur 15.47

Uitwerking

$$I(L) = \pi\int_1^4 \left(x^2 - \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2\right)dx = \pi\int_1^4 \left(x^2 - \tfrac{1}{4}x^2\right)dx$$

$$= \pi\int_1^4 \tfrac{3}{4}x^2\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{4}x^3\right]_1^4 = \pi\left(\tfrac{1}{4}\cdot 4^3 - \tfrac{1}{4}\cdot 1^3\right) = \pi\left(16 - \tfrac{1}{4}\right) = 15\tfrac{3}{4}\pi$$

$y = x$ geeft $x^2 = y^2$ en $y = ax$ geeft $x = \dfrac{y}{a}$, dus $x^2 = \dfrac{y^2}{a^2}$.

$$I(M) = \pi\int_1^4 \left(y^2 - \frac{y^2}{a^2}\right)dy = \pi\left[\tfrac{1}{3}y^3 - \frac{y^3}{3a^2}\right]_1^4 = \pi\left(\tfrac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{4^3}{3a^2} - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1^3}{3a^2}\right)\right)$$

$$= \pi\left(\tfrac{64}{3} - \frac{64}{3a^2} - \tfrac{1}{3} + \frac{1}{3a^2}\right) = \pi\left(\tfrac{63}{3} - \frac{63}{3a^2}\right) = \left(21 - \frac{21}{a^2}\right)\pi$$

Er geldt $\left(21 - \dfrac{21}{a^2}\right)\pi = 1\tfrac{1}{5}\cdot 15\tfrac{3}{4}\pi$ ofwel $21 - \dfrac{21}{a^2} = 18\tfrac{9}{10}$

$$\frac{21}{a^2} = 2\tfrac{1}{10}$$

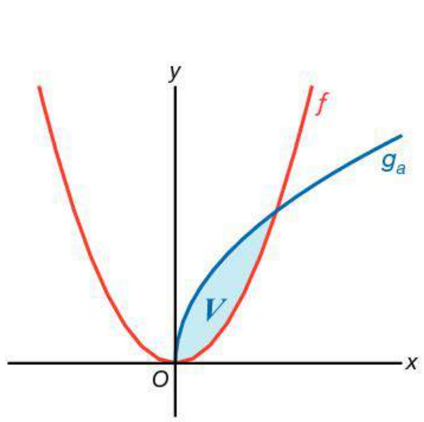
$$a^2 = 10$$

$$a = \sqrt{10} \vee a = -\sqrt{10}$$

$a > 1$, dus $a = \sqrt{10}$.

R 68 Zie het voorbeeld.
Ben wil berekenen voor welke a geldt $I(M) = 1\frac{2}{5}I(L)$.
- **a** Waarom lukt dit niet?
- **b** Lukt $I(M) = 1\frac{3}{10}I(L)$ wel? Licht toe.

69 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g_a(x) = a\sqrt{x}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafieken van f en g_a. Zie figuur 15.48.
- **a** Bereken exact voor welke a de oppervlakte van V gelijk is aan 10.
- **b** Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as. Bereken exact voor welke a de inhoud van L gelijk is aan 30π.



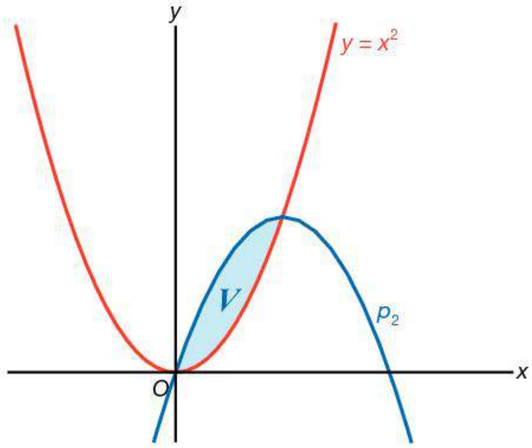
figuur 15.48

70 Gegeven is de parabool p_1: $y = x^2$. Verder is gegeven de parabool p_2 met de volgende eigenschappen:

- p_2 snijdt de x-as in de oorsprong en rechts van de oorsprong
- de top van p_2 ligt op p_1.

Zie figuur 15.49.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de parabolen p_1 en p_2.
Stel de top van p_2 is het punt (t, t^2).
Dan geldt p_2: $y = -x^2 + 2tx$.

a Bewijs dit.
b Bereken exact voor welke waarde van t de oppervlakte van V gelijk is aan 10.
c Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as. Bereken exact voor welke waarde van t de inhoud van L gelijk is aan 100π.



figuur 15.49

A 71 In deze opgave ga je gebruiken dat $F(x) = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x$ een primitieve is van $f(x) = \ln^2(x)$.

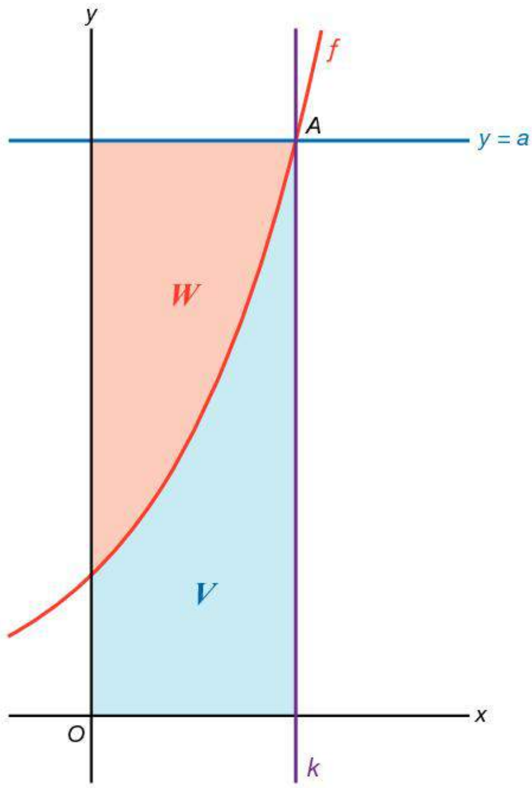
a Bewijs dat deze primitieve juist is.

Gegeven is de functie $f(x) = e^x$. De lijn $y = a$ met $a > 1$ snijdt de grafiek van f in het punt A. De lijn k is de verticale lijn door A. Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn k, de x-as en de y-as. Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de lijn $y = a$ en de y-as. Zie figuur 15.50.

b Bereken met behulp van primitiveren voor welke a de oppervlakte van V gelijk is aan de oppervlakte van W. Rond af op twee decimalen.

Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as.
Het lichaam M ontstaat als W wentelt om de x-as.
Het lichaam N ontstaat als W wentelt om de y-as.

c Bereken met behulp van primitiveren voor welke a de inhoud van L gelijk is aan de inhoud van M. Rond af op twee decimalen.
d Bereken met behulp van primitiveren voor welke waarde van a de inhoud van L zes keer zo groot is als de inhoud van N.
Rond af op twee decimalen.



figuur 15.50

Terugblik

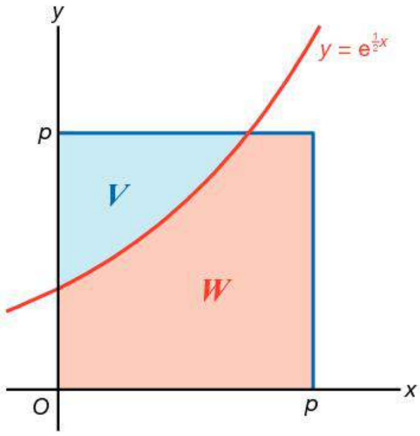
Integralen bij eerstegraads gebroken functies

Om de integraal $\int_0^3 \frac{6x+5}{2x+3}\,dx$ te berekenen, schrijf je eerst $\frac{6x+5}{2x+3}$ in de vorm $a + \frac{b}{2x+3}$. Dus $\frac{6x+5}{2x+3} = \frac{3(2x+3)-9+5}{2x+3} = 3 - \frac{4}{2x+3}$.

$$\int_0^3 \frac{6x+5}{2x+3}\,dx = \int_0^3 \left(3 - \frac{4}{2x+3}\right)dx = \left[3x - 2\ln|2x+3|\right]_0^3 = 9 - 2\ln(9) - (0 - 2\ln(3))$$
$$= 9 - 4\ln(3) + 2\ln(3) = 9 - 2\ln(3)$$

Verhouding van oppervlakten

De grafiek van $y = e^{\frac{1}{2}x}$ verdeelt het vierkant met zijde p, met $p > 1$, in de figuur hiernaast in de vlakdelen V en W. Er geldt $O(V) : O(W) = 1 : 3$. Hieruit volgt $O(V) = \frac{1}{4}p^2$. Om p te berekenen los je de vergelijking $O(V) = \frac{1}{4}p^2$ op.



Snijden van de lijn $y = p$ met de grafiek van $y = e^{\frac{1}{2}x}$ geeft $e^{\frac{1}{2}x} = p$, dus $x = 2\ln(p)$.

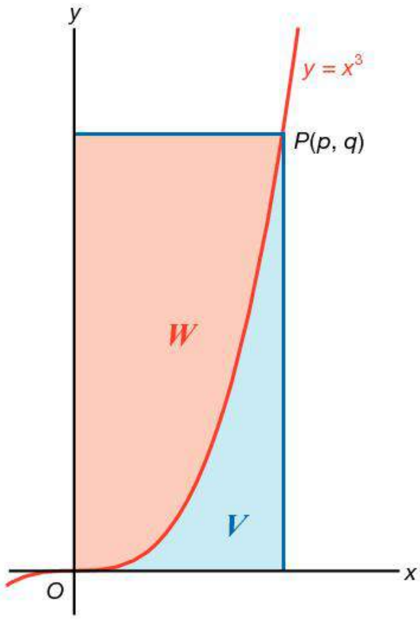
$$O(V) = \int_0^{2\ln(p)} \left(p - e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \left[px - 2e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{2\ln(p)} = 2p\ln(p) - 2p + 2$$

Zo krijg je de vergelijking $2p\ln(p) - 2p + 2 = \frac{1}{4}p^2$.

Invoeren van $y_1 = 2x\ln(x) - 2x + 2$ en $y_2 = \frac{1}{4}x^2$ en intersect geeft $x \approx 2{,}47$. Dus $p \approx 2{,}47$.

Wentelen om de *x*-as en om de *y*-as

Het punt $P(p, q)$ met $p > 0$ ligt op de grafiek van $y = x^3$. In de figuur hiernaast zie je ook de vlakdelen V en W. Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de x-as en het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y-as. Om te berekenen voor welke p geldt dat $I(L) = I(M)$ los je de vergelijking $\pi\int_0^p y^2\,dx = \pi\int_0^q x^2\,dy$ op.



Omdat geldt $q = p^3$ en $x = y^{\frac{1}{3}}$, dus $x^2 = y^{\frac{2}{3}}$ krijg je de vergelijking $\int_0^p x^6\,dx = \int_0^{p^3} y^{\frac{2}{3}}\,dy$. Dit geeft $\left[\frac{1}{7}x^7\right]_0^p = \left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right]_0^{p^3}$, dus $\frac{1}{7}p^7 = \frac{3}{5}p^5$ ofwel $\frac{1}{7}p^2 = \frac{3}{5}$. Je krijgt $p^2 = \frac{21}{5}$, dus $p = \sqrt{4\frac{1}{5}}$.

Diagnostische toets

15.1 Hellingen, buigpunten en toppen

1 Gegeven is de functie $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 - 5x$.
Onderzoek langs algebraïsche weg welke soort van stijgen of dalen er is in het punt A met $x_A = 1$.

15

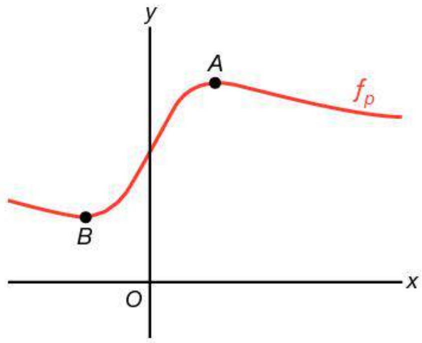
2 Gegeven is de functie $f_a(x) = (x + a)e^x$.

a Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a een top heeft op de y-as.

b Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a voor $x = 5$ overgaat van toenemend dalend in afnemend dalend.

3 Voor elke $p \neq 0$ is gegeven de functie

$f_p(x) = \dfrac{px^2 + 2x + p}{x^2 + 1}$. In figuur 15.51 is de grafiek van f_p voor een zekere waarde van p getekend. De toppen van de grafiek zijn A en B.
Bereken exact voor welke p geldt $OA = \sqrt{5} \cdot OB$.



figuur 15.51

15.2 Raakproblemen

4 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $g(x) = 1 + \ln(x)$.

Bereken langs algebraïsche weg in graden nauwkeurig de hoek tussen de grafieken in het punt A met $x_A = 1$.

5 **a** Bereken algebraïsch voor welke p de grafieken van $f(x) = x^3 - 3x$ en $g_p(x) = px + 16$ elkaar raken.

b Bewijs dat de grafiek van $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ en de lijn l: $y = -1\frac{1}{2}x + 6$ elkaar loodrecht snijden.

15.3 Optimaliseringsproblemen

6 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$. Het punt P met $x_P = p$ ligt op de grafiek van f. Voor de lengte L van het lijnstuk OP geldt $L = \sqrt{p^2 - 2p + 8}$.

a Bewijs dat deze formule juist is.

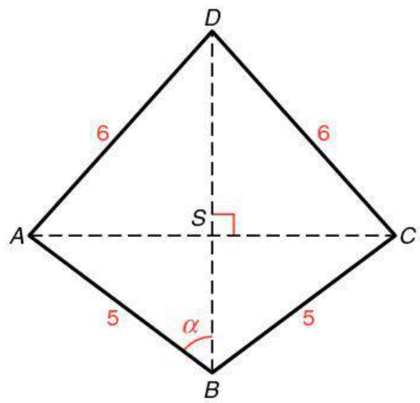
b Bereken exact de minimale waarde van L.

c Van rechthoek $OQPR$ ligt Q op de positieve x-as en R op de y-as. Bereken exact de maximale oppervlakte van rechthoek $OQPR$.

7 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x\right)$ en $g(x) = \ln\left(\dfrac{2}{3 - x}\right)$.
De lijn $x = p$ met $0 < p < 3$ snijdt de grafiek van f in A en de grafiek van g in B.
Bereken exact de minimale lengte van het lijnstuk AB.

8 Van de rechthoekige driehoek ABC met $\angle A = 90°$ is $AB + BC = 6$.
Stel $AB = x$, dan geldt voor de oppervlakte van $\triangle ABC$ de formule $O = \frac{1}{2}x\sqrt{36 - 12x}$.
a Bewijs dat deze formule juist is.
b Bereken exact de maximale oppervlakte van $\triangle ABC$.

9 Gegeven is vierhoek $ABCD$ met $AB = BC = 5$ en $CD = AD = 6$. Zie figuur 15.52. Stel $\angle ABD = \alpha$.
Er geldt $BD = 5\cos(\alpha) + \sqrt{36 - 25\sin^2(\alpha)}$.
a Bewijs dat deze formule juist is.
b Bereken in graden nauwkeurig de waarde van α waarvoor de oppervlakte van $ABCD$ maximaal is.

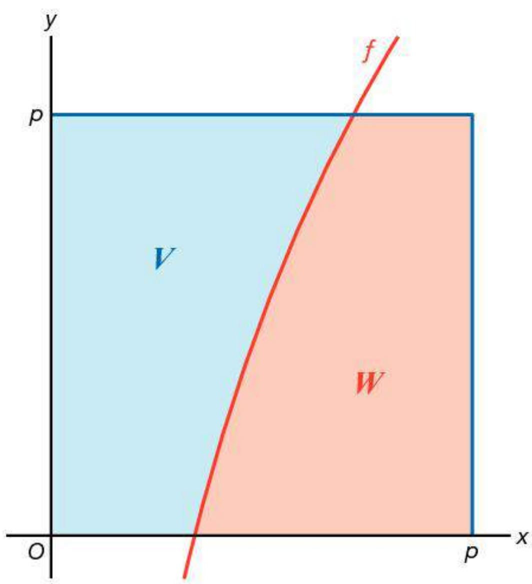


figuur 15.52

15.4 Integralen bij oppervlakte en inhoud

10 Primitiveer.
a $f(x) = \dfrac{5 - x}{x + 3}$
b $g(x) = \dfrac{3x}{2x + 3}$

11 In figuur 15.53 is een vierkant met zijde p, met $1\frac{1}{2} < p < 8$, getekend waarvan een hoekpunt in de oorsprong ligt en twee zijden langs de assen vallen. De grafiek van $f(x) = 4\ln(x)$ verdeelt het vierkant in de vlakdelen V en W.
a Bereken met behulp van primitiveren in twee decimalen nauwkeurig voor welke p de vlakdelen V en W gelijke oppervlakte hebben.
b Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de y-as en het lichaam M ontstaat als W wentelt om de y-as.
Bereken met behulp van primitiveren in twee decimalen nauwkeurig voor welke p de lichamen L en M gelijke inhoud hebben.



figuur 15.53

In dit hoofdstuk staat een overzicht van de onderwerpen die je moet beheersen voor het Centraal Examen. De onderwerpen zijn verdeeld over vijf paragrafen. In de theorie worden de belangrijke zaken op een rijtje gezet en soms toegelicht met enkele voorbeelden. Verder tref je in elke paragraaf een selectie aan van passende examenvragen. Je kunt de paragrafen in willekeurige volgorde doornemen of een keuze maken. Het hoofdstuk wordt afgesloten met de pilotexamens van 2016.

Waar moet je bij het examen op letten?

- Rond af op het gevraagde aantal decimalen. Anders kost je dat een punt.
- Let erop dat je de juiste aanpak kiest bij algebraïsch en exact berekenen, en bij het aantonen en bewijzen.
- Schrijf bij vragen waar je niet helemaal uitkomt toch zoveel mogelijk op. Dat kan punten opleveren.
- Schrijf tussenstappen op.
- Ga steeds na of je antwoord hebt gegeven op de gestelde vraag.

Examentraining

16

16.1 Algemene vaardigheden

Herleiden

- Voor het *wegwerken van de haakjes* in $(3x - 1)^2$, $(x^2 + 4)^2$ en $(x^3 - y^2)(x^3 + y^2)$ gebruik je de merkwaardige producten.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$
$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$2AB$ heet het dubbele product van A en B.

$$(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$$
$$(x^2 + 4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16$$
$$(x^3 - y^2)(x^3 + y^2) = x^6 - y^4$$

- De merkwaardige producten heb je soms ook nodig bij het *herleiden van breuken*, bijvoorbeeld bij het herleiden van de formules $y = \dfrac{x^6 - 16}{x^3 + 4}$ en $N = \dfrac{p^4 - 10p^2 + 25}{p^4 - 25}$.

$$y = \frac{x^6 - 16}{x^3 + 4} = \frac{(x^3 + 4)(x^3 - 4)}{x^3 + 4} = x^3 - 4 \text{ mits } x \neq \sqrt[3]{-4}$$

$$N = \frac{p^4 - 10p^2 + 25}{p^4 - 25} = \frac{(p^2 - 5)^2}{(p^2 + 5)(p^2 - 5)} = \frac{p^2 - 5}{p^2 + 5} \text{ mits } p \neq \sqrt{5} \wedge p \neq -\sqrt{5}$$

- Bij het *herleiden van wortels* gebruik je de volgende rekenregels.

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB} \text{ mits } A \geq 0 \wedge B \geq 0$$
$$\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ mits } A \geq 0 \wedge B > 0$$
$$\sqrt{A^2} = |A|$$

$$\sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$$\sqrt{54} - \frac{8\sqrt{30}}{2\sqrt{5}} = 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$
$$\sqrt{\tfrac{8}{9}a^2} = \sqrt{\tfrac{4}{9}a^2 \cdot 2} = \tfrac{2}{3}|a|\sqrt{2}$$
$$(2a - \sqrt{3})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{3} + 3$$
$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50} - \sqrt{20}}{5 - 2} = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{3} = 1\tfrac{2}{3}\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\sqrt{5}$$

- Bij het *herleiden van vormen met breuken* gebruik je de volgende regels.

$$\frac{A}{B} + C = \frac{A + BC}{B}$$
$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$$
$$A \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{C} = \frac{A}{C} \cdot B = A \cdot B \cdot \frac{1}{C}$$
$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$
$$\frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)} = A \cdot \frac{C}{B} = \frac{AC}{B} \text{ mits } C \neq 0$$

$$10 - \frac{3}{x^2} = \frac{10x^2 - 3}{x^2}$$
$$\frac{a}{2b} + \frac{5}{b} = \frac{a}{2b} + \frac{10}{2b} = \frac{a + 10}{2b}$$
$$\frac{4}{x} - \frac{3}{x - 1} = \frac{4(x - 1) - 3x}{x(x - 1)} = \frac{4x - 4 - 3x}{x(x - 1)} = \frac{x - 4}{x(x - 1)}$$
$$\frac{20}{\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)} = 20 \cdot \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{20x + 20}{x - 1} \text{ mits } x \neq -1$$

- Bij het *herleiden van machten* gebruik je de rekenregels voor machten.

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$(ab)^p = a^p b^p$	$a^0 = 1$
$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$$2^x \cdot 4^{x+1} = 2^x \cdot \left(2^2\right)^{x+1} = 2^x \cdot 2^{2x+2} = 2^{3x+2}$$
$$\frac{9^{x-1}}{3^{x-2}} = \frac{\left(3^2\right)^{x-1}}{3^{x-2}} = \frac{3^{2x-2}}{3^{x-2}} = 3^x$$
$$\left(3x^{\frac{4}{5}}\right)^2 = 9x^{\frac{8}{5}} = 9x^1 \cdot x^{\frac{3}{5}} = 9x \cdot \sqrt[5]{x^3}$$
$$20^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-2} = \frac{\sqrt{20}}{x^2} = \frac{2\sqrt{5}}{x^2}$$

Vergelijkingen oplossen

Bij het algebraïsch of exact oplossen van vergelijkingen werk je al schrijvend stap voor stap naar de oplossing toe.

- *Eerstegraadsvergelijkingen*
  1. Werk haakjes en breuken weg.
  2. Breng alle termen met x naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
  3. Deel beide leden door het getal dat voor x staat.
- *Tweedegraadsvergelijkingen*
  - $ax^2 + bx = 0$
    Breng x buiten haakjes.
  - $ax^2 + c = 0$
    Herleid tot de vorm $x^2 = \text{getal}$.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is te ontbinden
    Ontbind het linkerlid en gebruik
    $A \cdot B = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$.
  - $ax^2 + bx + c = 0$ en het linkerlid is niet te ontbinden
    Ga kwadraatafsplitsen of gebruik de *abc*-formule.
- *Hogeregraadsvergelijkingen*
  - $x^n = p$ met $n = 2, 3, 4, \ldots$

    n oneven $\quad x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p}$

    n even en $p > 0 \quad x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$

    n even en $p < 0 \quad x^n = p$ heeft geen oplossing
  - Derdegraadsvergelijkingen zoals $x^3 - x^2 - 2x = 0$.
    Breng x buiten haakjes. Je krijgt
    $x(x^2 - x - 2) = 0$
    $x(x + 1)(x - 2) = 0$
    $x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2$
    Bij de vierdegraadsvergelijking $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$ breng je x^2 buiten haakjes.
  - Vierdegraadsvergelijkingen zoals $x^4 - x^2 - 2 = 0$.
    Gebruik de substitutie $x^2 = u$. Je krijgt
    $u^2 - u - 2 = 0$
    $(u + 1)(u - 2) = 0$
    $u = -1 \vee u = 2$
    $x^2 = -1 \vee x^2 = 2$
    geen opl. $x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$
    Bij $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$ gebruik je na de substitutie $x^2 = u$ de *abc*-formule bij $u^2 - 2u - 2 = 0$.
    Bij de zesdegraadsvergelijking $x^6 - x^3 - 2 = 0$ gebruik je de substitutie $x^3 = u$.

Algebraïsch
Stap voor stap zonder gebruik te maken van opties van de GR. Zo nodig geef je het antwoord in het gevraagde aantal decimalen.

Exact
Ga algebraïsch te werk en rond niet af.

De *abc*-formule
$ax^2 + bx + c = 0$
$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$
met $D = b^2 - 4ac$

- *Modulusvergelijkingen*

> $|A| = B$ met $B \geq 0$ geeft $A = B \vee A = -B$
> $|A| = B$ met $B < 0$ heeft geen oplossing

Bij de vergelijking $|x^2 - 10| = 2$ krijg je

$$x^2 - 10 = 2 \vee x^2 - 10 = -2$$
$$x^2 = 12 \vee x^2 = 8$$
$$x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2}$$

- *De vormen $A \cdot B = A \cdot C$ en $A^2 = B^2$*

> $A \cdot B = A \cdot C$ geeft $A = 0 \vee B = C$
> $A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$

Bij de vergelijking $(x^2 - 1)(x + 2) = 12(x - 1)$ krijg je

$$(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 12(x - 1)$$
$$x - 1 = 0 \vee (x + 1)(x + 2) = 12$$
$$x = 1 \vee x^2 + 3x + 2 = 12$$
$$x = 1 \vee x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$x = 1 \vee (x - 2)(x + 5) = 0$$
$$x = 1 \vee x = 2 \vee x = -5$$

Bij de vergelijking $(x^2 - 1)^2 = (x + 5)^2$ krijg je

$$x^2 - 1 = x + 5 \quad \vee \quad x^2 - 1 = -x - 5$$
$$x^2 - x - 6 = 0 \quad \vee \quad x^2 + x + 4 = 0$$
$$(x + 2)(x - 3) = 0 \quad D = 1 - 16 = -15 < 0$$
$$x = -2 \vee x = 3$$

- *Wortelvergelijkingen*
  Het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen gaat in drie stappen.

> 1 **Isoleer** de wortelvorm, dus zet de wortelvorm apart.
> 2 **Kwadrateer** het linker- en rechterlid en los de verkregen vergelijking op.
> 3 **Controleer** of de oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Bij de vergelijking $2x - \sqrt{x - 1} = 5$ krijg je

$$2x - 5 = \sqrt{x - 1}$$

kwadrateren geeft

$$4x^2 - 20x + 25 = x - 1$$
$$4x^2 - 21x + 26 = 0$$
$$D = (-21)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 26 = 25$$
$$x = \frac{21 - 5}{8} = 2 \vee x = \frac{21 + 5}{8} = 3\tfrac{1}{4}$$

$x = 2$ geeft $4 - 1 = 5$ voldoet niet

$x = 3\frac{1}{4}$ geeft $6\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 5$ voldoet

16

- *Gebroken vergelijkingen*
  Je gebruikt de volgende regels.

$$\frac{A}{B} = 0 \text{ geeft } A = 0 \wedge B \neq 0$$
$$\frac{A}{B} = C \text{ geeft } A = BC \wedge B \neq 0$$
$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ geeft } AD = BC \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$$
$$\frac{A}{B} = \frac{C}{B} \text{ geeft } A = C \wedge B \neq 0$$
$$\frac{A}{B} = \frac{A}{C} \text{ geeft } (A = 0 \vee B = C) \wedge B \neq 0 \wedge C \neq 0$$

16

Bij de vergelijking $\frac{2x^2-6}{x^2+2} = \frac{x^2-3}{x^2-5}$ krijg je

$$\frac{2x^2-6}{x^2+2} = \frac{2x^2-6}{2x^2-10}$$
$$2x^2 - 6 = 0 \vee x^2 + 2 = 2x^2 - 10$$
$$2x^2 = 6 \vee -x^2 = -12$$
$$x^2 = 3 \vee x^2 = 12$$
$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{3} \vee x = -2\sqrt{3}$$
vold. vold. vold. vold.

- *Stelsels vergelijkingen*
  - Elimineren door optellen of aftrekken.
    Deze methode gebruik je meestal bij een stelsel met lineaire vergelijkingen zoals $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases}$

    Je krijgt $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 5 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 3y = 15 \end{cases}$ +

    $$\begin{aligned} 5x &= 20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

    $x = 4$ en $x - y = 5$ geeft $y = -1$, dus $(x, y) = (4, -1)$.

  - Elimineren door substitueren.
    Deze methode gebruik je als elimineren door optellen of aftrekken niet lukt, zoals bijvoorbeeld bij
    $2x + 3y = 5 \wedge x^2 + y^2 = 13$.
    Je krijgt $2x = -3y + 5$, dus $x = -1\frac{1}{2}y + 2\frac{1}{2}$.

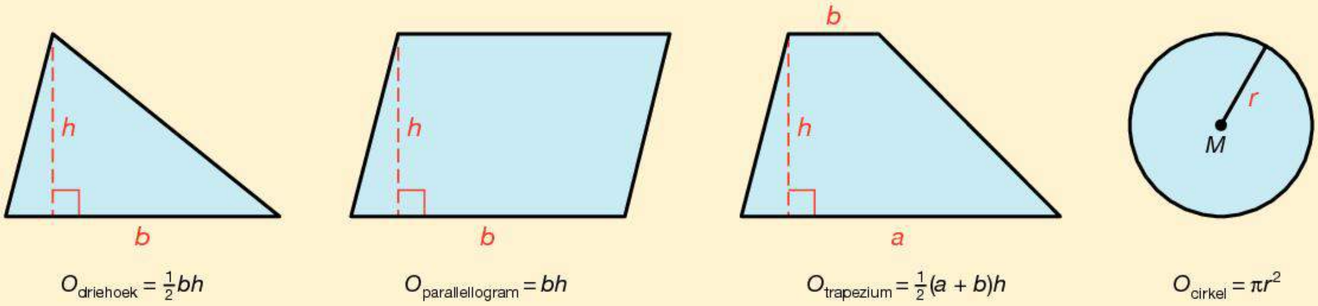
    Substitueren van $x = -1\frac{1}{2}y + 2\frac{1}{2}$ in $x^2 + y^2 = 13$ geeft

    $$\left(-1\tfrac{1}{2}y + 2\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 13$$
    $$2\tfrac{1}{4}y^2 - 7\tfrac{1}{2}y + 6\tfrac{1}{4} + y^2 = 13$$
    $$3\tfrac{1}{4}y^2 - 7\tfrac{1}{2}y - 6\tfrac{3}{4} = 0$$
    $$13y^2 - 30y - 27 = 0$$

    Dit geeft $y = -\frac{9}{13} \vee y = 3$, dus $(x, y) = \left(3\frac{7}{13}, -\frac{9}{13}\right) \vee (x, y) = (-2, 3)$.

Vlakke figuren

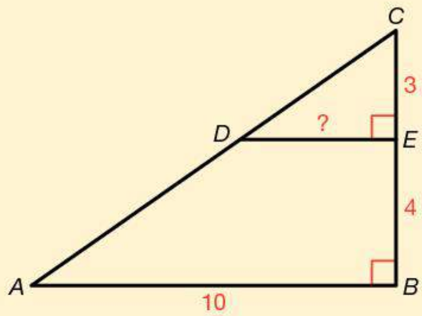
De oppervlakteformules van de vier basisfiguren zijn



figuur 16.1

Uit gelijkvormigheid van driehoeken volgt de verhouding van de overeenkomstige zijden en hiermee zijn lengten te berekenen. In de figuur hiernaast is $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$ en hieruit volgt $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EC}$.

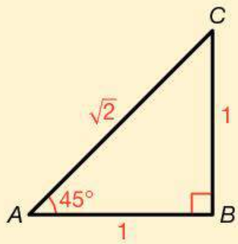
Invullen geeft $\dfrac{10}{DE} = \dfrac{7}{3}$, dus $DE = \dfrac{10 \cdot 3}{7} = 4\frac{2}{7}$.



figuur 16.2

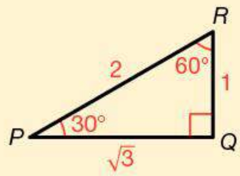
Er zijn twee bijzondere rechthoekige driehoeken.

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.



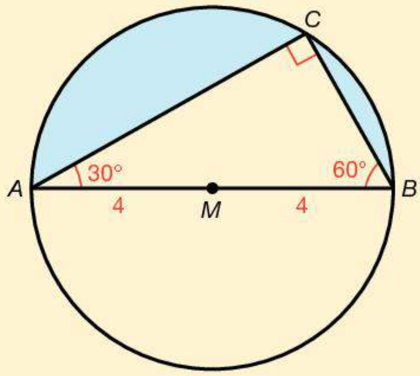
figuur 16.3

De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.



figuur 16.4

Om exact de totale oppervlakte van de blauwe vlakdelen in de figuur hiernaast te berekenen, bedenk je dat $BC = \frac{1}{2}AB = 4$ en $AC = 4\sqrt{3}$, dus $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$. De oppervlakte van de halve cirkel is $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 = 8\pi$, dus de oppervlakte van de blauwe vlakdelen is $8\pi - 8\sqrt{3}$.



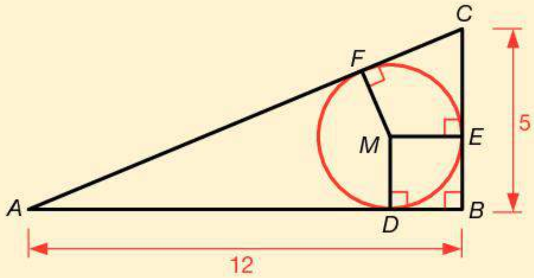
figuur 16.5

Aantonen en bewijzen

Vaak wordt in het examen gevraagd iets aan te tonen of te bewijzen. In beide gevallen geef je een redenering en/of een berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Bij aantonen mag je gebruik maken van de opties van de GR. Bij bewijzen mag dat niet. Zowel bij aantonen als bewijzen is het niet voldoende het gestelde te controleren door middel van een of meer voorbeelden. Vaak heb je wat aangetoond of bewezen moet worden nodig in het vervolg van de opgave.

In de figuur hiernaast is de rechthoekige driehoek ABC met $AB = 12$ en $BC = 5$ getekend. Gevraagd wordt aan te tonen dat de straal van de ingeschreven cirkel gelijk is aan 2.
Hierbij kun je als volgt te werk gaan.

- Bereken AC met de stelling van Pythagoras. Je krijgt $AC = 13$.
- Stel de straal is x, dus $MD = ME = MF = x$, maar ook $BD = BE = x$. Dus $AD = 12 - x$ en $CE = 5 - x$.
- Dit geeft $AF = AD = 12 - x$ en $CF = CE = 5 - x$, dus $AC = AF + CF = 12 - x + 5 - x = 17 - 2x$.
- Omdat ook $AC = 13$ krijg je $17 - 2x = 13$ ofwel $x = 2$. Hiermee is aangetoond dat de straal van de ingeschreven cirkel 2 is.



figuur 16.6

Stelling afstand punt tot raakpunten
Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.

Parabolen

- Bij tweedegraadsfuncties gebruik je bij het algebraïsch of exact berekenen van de *coördinaten van de top* van de grafiek de formule $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a}$ of de vergelijking afgeleide = 0.
  Bij $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$ krijg je $x_{\text{top}} = \dfrac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.
  De afgeleide is $f'(x) = 4x - 6$ en $f'(x) = 0$ geeft $4x - 6 = 0$, dus $x = 1\frac{1}{2}$.
  De y-coördinaat is $f\left(1\frac{1}{2}\right) = -3\frac{1}{2}$, dus de top is $\left(1\frac{1}{2}, -3\frac{1}{2}\right)$.
- Om te onderzoeken voor welke waarde van p de parabool $y = 2x^2 - 6x + p$ de x-as raakt, los je de vergelijking $D = 0$ op.
  $D = (-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot p = 36 - 8p$, dus $36 - 8p = 0$ en dit geeft $p = 4\frac{1}{2}$.
  Dus de parabool $y = 2x^2 - 6x + p$ raakt de x-as voor $p = 4\frac{1}{2}$.
- Om te onderzoeken voor welke waarde van q de lijn $y = 2x + q$ de parabool $y = 2x^2 - 6x + 1$ raakt kun je op twee manieren te werk gaan.
  1 Gebruik $D = 0$.
  Je krijgt $2x^2 - 6x + 1 = 2x + q$
  $2x^2 - 8x + 1 - q = 0$
  $D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - q) = 64 - 8 + 8q = 56 + 8q$
  Voor raken geldt $D = 0$, dus $56 + 8q = 0$ en dit geeft $q = -7$.
  2 Gebruik dat de afgeleide gelijk is aan $\text{rc}_{\text{raaklijn}}$.
  $y = 2x^2 - 6x + 1$ geeft $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 6$.
  Voor raken geldt $\dfrac{dy}{dx} = \text{rc}_{\text{raaklijn}}$ ofwel $4x - 6 = 2$ en dit geeft $x = 2$.
  $x = 2$ geeft $y = 2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 1 = -3$
  $(2, -3)$ op de lijn $y = 2x + q$ geeft $2 \cdot 2 + q = -3$, dus $q = -7$.

Transformaties

- Bij de translatie $(0, a)$ tel je a op bij de functiewaarde.
  $y = 2^{x+1} - 3 \xrightarrow{\text{translatie } (0,\, 5)} y = 2^{x+1} + 2$
- Bij de translatie $(b, 0)$ vervang je x door $x - b$.
  $y = x^2 - 3x \xrightarrow{\text{translatie } (2,\, 0)} y = (x-2)^2 - 3(x-2) = x^2 - 7x + 10$
- Bij de vermenigvuldiging met c t.o.v. de x-as vermenigvuldig je de functiewaarde met c.
  $y = \dfrac{x-1}{2x-3} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 4} y = 4 \cdot \dfrac{x-1}{2x-3} = \dfrac{4x-4}{2x-3}$
- Bij de vermenigvuldiging met d t.o.v. de y-as vervang je x door $\dfrac{1}{d}x$.
  $y = 4 + \sqrt{2x - 1} \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } 3} y = 4 + \sqrt{2 \cdot \frac{1}{3}x - 1} = 4 + \sqrt{\frac{2}{3}x - 1}$
- Bij spiegeling in de lijn $y = x$ vervang je x door y en y door x.
  $2x - 3y = 4 \xrightarrow{\text{spiegelen in } y = x} 2y - 3x = 4$
  $y = 3\ln(x) \xrightarrow{\text{spiegelen in } y = x} x = 3\ln(y)$ ofwel $y = e^{\frac{1}{3}x}$

16

Inverse functies
Functies f en g met de eigenschap dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ zijn elkaars inverse.

Om aan te tonen dat de functies $f(x) = 5 - \dfrac{6}{x+2}$ en $g(x) = \dfrac{2x-4}{5-x}$ elkaars inverse zijn, kun je als volgt te werk gaan.

- Ga uit van $y = 5 - \dfrac{6}{x+2}$ en verwissel x en y.
  Je krijgt $x = 5 - \dfrac{6}{y+2}$.
- Maak y vrij bij $x = 5 - \dfrac{6}{y+2}$.
  Dus $\dfrac{6}{y+2} = 5 - x$
  $y + 2 = \dfrac{6}{5-x}$
  $y = \dfrac{6}{5-x} - 2$
- Dus $f^{\text{inv}}(x) = \dfrac{6}{5-x} - 2 = \dfrac{6-2(5-x)}{5-x} = \dfrac{6-10+2x}{5-x} = \dfrac{2x-4}{5-x} = g(x)$.
  Hiermee is aangetoond dat f en g elkaars inverse zijn.

Limieten en perforaties
De limiet $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ bestaat als $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$.

Hierbij is $\lim\limits_{x \uparrow a} f(x)$ een linkerlimiet en $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x)$ een rechterlimiet.

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{3x^2 - 7x - 20}{x-4}$ heeft een perforatie voor $x = 4$, want $f(4)$ bestaat niet en $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ bestaat wel. Om de coördinaten van de perforatie te vinden bereken je $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Daartoe ontbind je $3x^2 - 7x - 20$ in twee factoren, waarvan de ene factor $(x - 4)$ is.
Je krijgt $3x^2 - 7x - 20 = (x-4)(3x+5)$.
Dus $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 7x - 20}{x-4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(3x+5)}{x+4} = \lim\limits_{x \to 4} (3x+5) = 17$.
De grafiek van f is de lijn $y = 3x + 5$ met de perforatie $(4, 17)$.

Limieten en asymptoten

De grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{x^2 - 1}$ heeft twee verticale asymptoten en één horizontale asymptoot.
De verticale asymptoten vind je door de noemer nul te stellen.
Er moet gelden noemer = 0 en teller ≠ 0.
Dus $x^2 - 1 = 0 \wedge 5x^2 - 3x \neq 0$ en dat geeft $x = 1 \vee x = -1$.
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 1$ en $x = -1$.
Omdat voor de functie f geldt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ is het voldoende om voor het berekenen van de formule van de horizontale asymptoot $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ te berekenen.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \dfrac{5 - 0}{1 - 0} = 5$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 5$.

De grafiek van de functie $g(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{x - 1}$ heeft behalve de verticale asymptoot $x = 1$ ook een scheve asymptoot.
Je kunt als volgt bewijzen dat dit de lijn $y = 5x + 2$ is.

$$g(x) = \frac{5x^2 - 3x}{x - 1} = \frac{5x(x - 1) + 5x - 3x}{x - 1} = 5x + \frac{2x}{x - 1}$$
$$= 5x + \frac{2(x - 1) + 2}{x - 1} = 5x + 2 + \frac{2}{x - 1}$$

Omdat $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x - 1} = 0$ nadert de grafiek van g de lijn $y = 5x + 2$ voor zowel $x \to \infty$ als voor $x \to -\infty$, dus de scheve asymptoot is de lijn $y = 5x + 2$.

1 **2012-I**

De functie f_b wordt gegeven door $f_b(x) = \dfrac{x - b}{x^2 - b^2}$ met $x \neq -b$ en $x \neq b$. Voor elke waarde van $b \neq 0$ heeft de grafiek van f_b een perforatie.
Bereken exact de waarde(n) van b waarvoor deze perforatie op de lijn met vergelijking $y = 4x + 1$ ligt.

16

2 **2012-I**

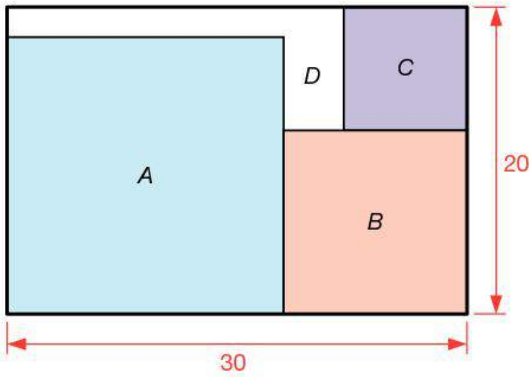
In een rechthoek van 20 bij 30 liggen drie vierkanten: *A* linksonder, *B* rechtsonder en *C* rechtsboven. Van elk vierkant valt een van de hoekpunten samen met een van de hoekpunten van de rechthoek. *A* en *B* liggen tegen elkaar aan, en *B* en *C* ook. Het deel van de rechthoek dat niet bedekt is door de vierkanten noemen we *D*. Zie figuur 16.7.

Als de lengte van de zijde van vierkant *A* gekozen is, liggen de afmetingen van de delen *B*, *C* en *D* vast.

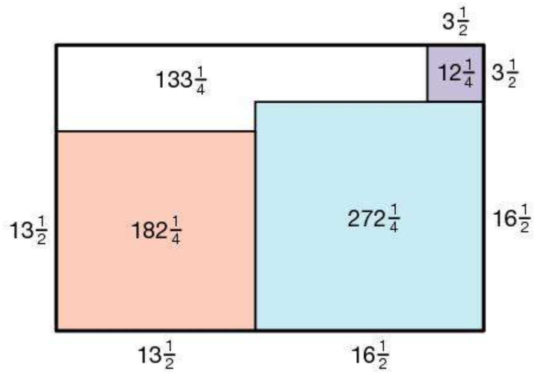
In figuur 16.8 is, bij een keuze van $13\frac{1}{2}$ voor de zijde van vierkant *A*, van elk deel de oppervlakte aangegeven.

Er is een lengte van de zijde van vierkant *A* waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

Bereken exact deze lengte.



figuur 16.7



figuur 16.8

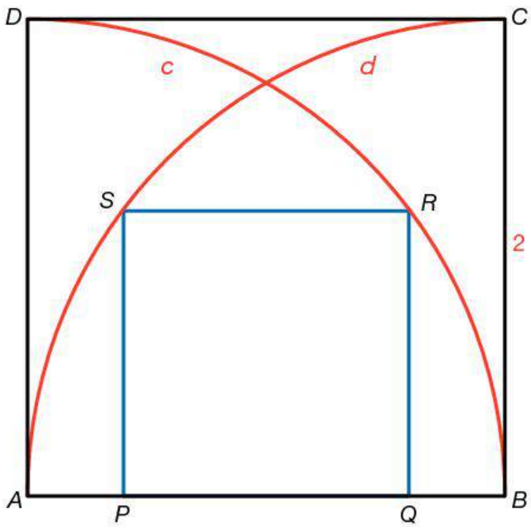
3 **2013-I**

Gegeven is het vierkant *ABCD* met zijde 2. Zie figuur 16.9. In dit vierkant zijn getekend

- de kwartcirkel *c* met middelpunt *A* en eindpunten *B* en *D*
- de kwartcirkel *d* met middelpunt *B* en eindpunten *A* en *C*
- het vierkant *PQRS* met *P* en *Q* op *AB*, *R* op *c* en *S* op *d*.

Er geldt $PQ = \frac{6}{5}$.

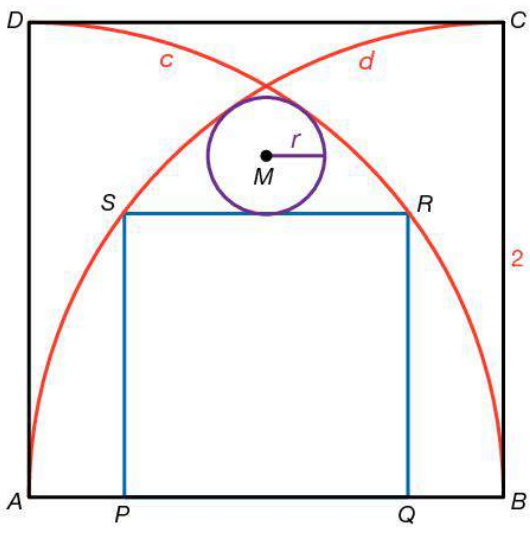
a Toon dit op algebraïsche wijze aan, bijvoorbeeld met behulp van driehoek *AQR*.



figuur 16.9

Aan de tekening in figuur 16.9 is een cirkel met middelpunt *M* en straal *r* toegevoegd, die *RS* en de beide kwartcirkels raakt. Zie figuur 16.10.

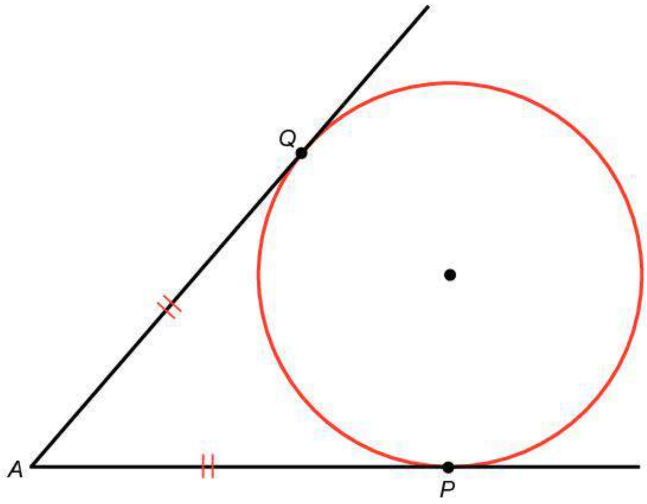
b Bereken exact de straal *r*.



figuur 16.10

4 2014-I

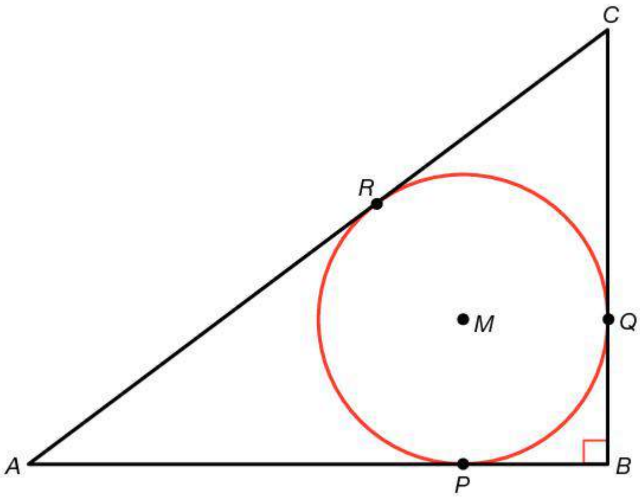
Als vanuit een punt A buiten een cirkel de twee raaklijnen aan die cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van A tot de twee raakpunten P en Q even groot. In figuur 16.11 geldt dus $AP = AQ$. Deze eigenschap mag je in deze opgave gebruiken.



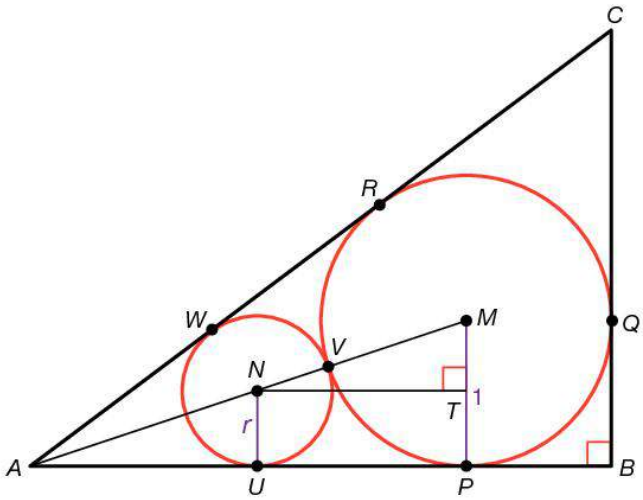
figuur 16.11

Gegeven is een rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden $AB = 4$ en $BC = 3$. De ingeschreven cirkel van driehoek ABC raakt de zijden van de driehoek in P, Q en R.
M is het middelpunt van deze cirkel. Zie figuur 16.12.
De straal van de ingeschreven cirkel van driehoek ABC is 1.

a Bewijs dit.



figuur 16.12



figuur 16.13

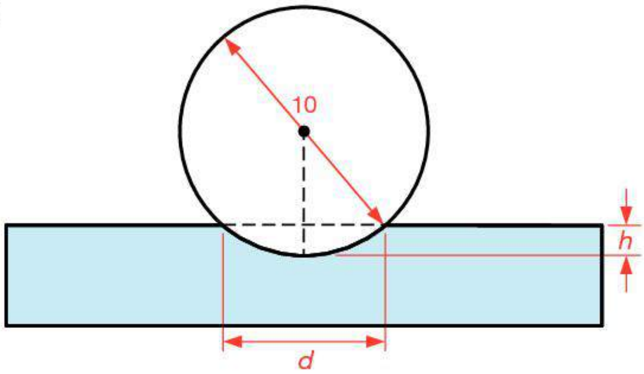
Tussen de ingeschreven cirkel en de zijden AB en AC van de driehoek wordt een tweede cirkel met middelpunt N getekend. Deze tweede cirkel raakt de zijde AB in U, de ingeschreven cirkel in V en de zijde AC in W. De punten M, N en A liggen dus op één lijn. De straal NU van de tweede cirkel is r. De loodrechte projectie van N op MP is T. Zie figuur 16.13.
Er geldt $AU = 3r$.

b Bewijs dit.

c Bereken r. Rond je antwoord af op twee decimalen.

5 **2015-I**

De Zweed Brinell ontwikkelde een methode voor het bepalen van de hardheid van materialen. Bij deze methode wordt gebruik gemaakt van een massieve bolvormige kogel die een diameter van 10 mm heeft. De kogel wordt met kracht tegen het te testen materiaal gedrukt, waardoor er in het materiaal een indruk in de vorm van een bolsegment ontstaat. De oppervlakte van dat bolsegment hangt af van de hardheid van het materiaal en de kracht waarmee wordt gedrukt.
Deze kracht mag niet zo groot zijn dat de kogel vervormt of voor meer dan de helft in het materiaal wordt gedrukt. In de praktijk wordt bij de hardheidsmeting volgens Brinell de diameter d in mm van de cirkelvormige rand van de indruk gemeten. In figuur 16.14 is een dwarsdoorsnede getekend van een kogel met diameter 10 mm die een stukje in het materiaal is gedrukt. De diepte van de indruk is h mm.



figuur 16.14

Met behulp van figuur 16.14 kan het volgende verband tussen h en d worden gevonden $h = \dfrac{10 - \sqrt{100 - d^2}}{2}$.

a Bewijs de juistheid van deze formule.

De hardheid volgens Brinell wordt aangeduid als HB. Deze hardheid wordt bepaald met de formule $HB = 0{,}102 \cdot \dfrac{F}{10\pi h}$.
Hierbij is F de kracht in newton (N) waarmee wordt gedrukt.
Bij een hardheidsmeting wordt de kogel met een kracht van 29 400 N in het te testen materiaal gedrukt.

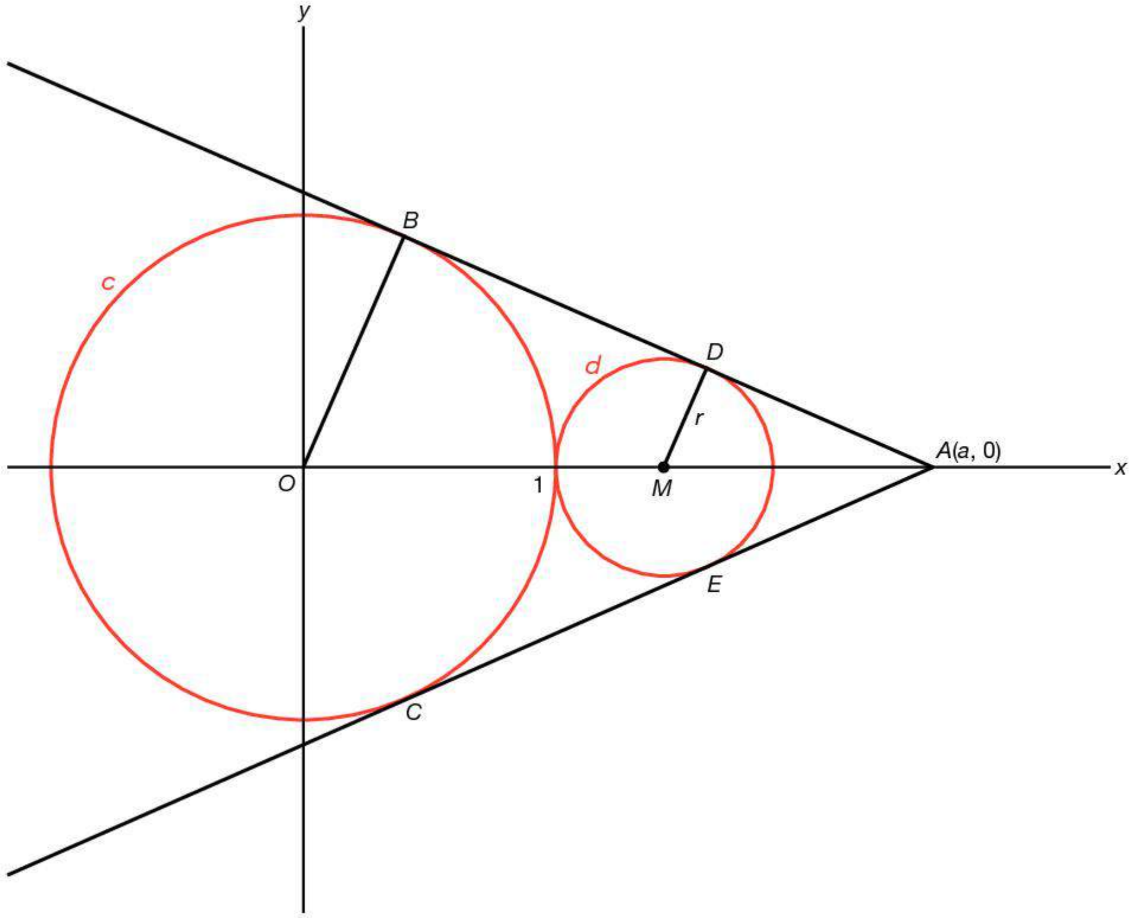
b Bereken voor welke waarde van d de hardheid HB van het materiaal 340 is. Rond je antwoord af op één decimaal.

6 **2015-I**

Voor elke waarde van a wordt de functie f_a gegeven door
$f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 10x + 4}{2x - a}$ met $x \neq \frac{1}{2}a$.
Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een lijn met een perforatie is.
Bereken exact, voor de grootste van die twee waarden van a, de coördinaten van de perforatie.

7 2014-II

Gegeven is de cirkel c met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 1.
Verder is gegeven het punt $A(a, 0)$ met $a > 1$.
Er zijn twee lijnen door A die aan c raken. De raakpunten zijn B en C. De twee raaklijnen en cirkel c sluiten een cirkel d in. Cirkel d raakt de twee lijnen in D en E en cirkel c in $(1, 0)$. Cirkel d heeft middelpunt M. Zie figuur 16.15.



figuur 16.15

Driehoek AMD en driehoek AOB zijn gelijkvormig.
Voor de straal r van cirkel d geldt $r = \dfrac{a-1}{a+1}$.

a Bewijs dat $r = \dfrac{a-1}{a+1}$.

Er is een waarde van a waarvoor vierhoek $OCAB$ een vierkant is.
In dat geval kan de straal van cirkel d geschreven worden als $r = p + q\sqrt{2}$ waarbij p en q gehele getallen zijn.

b Bereken exact de waarden van p en q.

16.2 Differentiaal- en integraalrekening

Regels voor het differentiëren
Enkele regels voor het differentiëren.

$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = nax^{n-1}$	
$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$	
$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$	somregel
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	productregel
$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$	quotiëntregel
$f(x) = u(v(x))$ geeft $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	kettingregel

De andere regels komen in de paragrafen 16.3 en 16.4 aan de orde.

Om de afgeleide van de functie $f(x) = x^2 + 10 + 6\sqrt{100 - 8x}$ te berekenen, gebruik je de kettingregel bij $y = 6\sqrt{100 - 8x}$.

Je krijgt $f'(x) = 2x + 6 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{100 - 8x}} \cdot -8 = 2x - \dfrac{24}{\sqrt{100 - 8x}}$.

Bij het berekenen van de afgeleide van $g(x) = (x^2 - 1)\sqrt{2x - 3}$ heb je de productregel en de kettingregel nodig. Je krijgt

$$g'(x) = 2x \cdot \sqrt{2x - 3} + (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x - 3}} \cdot 2 = 2x\sqrt{2x - 3} + \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2x - 3}}$$

$$= \frac{2x(2x - 3) + x^2 - 1}{\sqrt{2x - 3}} = \frac{4x^2 - 6x + x^2 - 1}{\sqrt{2x - 3}} = \frac{5x^2 - 6x - 1}{\sqrt{2x - 3}}$$

Regels voor het primitiveren
Enkele regels voor het primitiveren.

$f(x) = ax^n$ geeft $F(x) = \dfrac{a}{n + 1} x^{n+1} + c$ met $n \neq -1$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$

De primitieven van $f(ax + b)$ zijn $\dfrac{1}{a} F(ax + b) + c$.

De andere regels komen in de paragrafen 16.3 en 16.4 aan de orde.

Om de primitieven te berekenen van $f(x) = \sqrt{3x + 1}$ schrijf je $f(x) = (3x + 1)^{\frac{1}{2}}$.

Je krijgt $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1\frac{1}{2}}(3x + 1)^{1\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{9}(3x + 1)\sqrt{3x + 1} + c$.

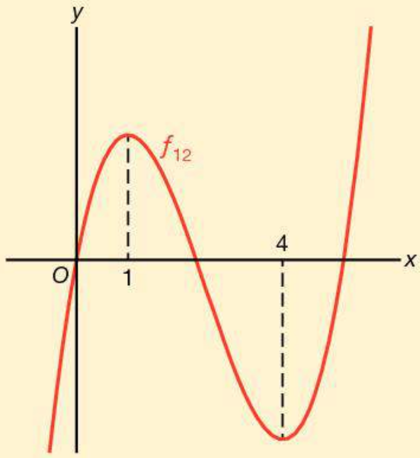
Bij $g(x) = \dfrac{1}{3x + 1}$ krijg je $G(x) = \frac{1}{3}\ln|3x + 1| + c$.

Extreme waarden, buigpunten en raaklijnen

Gegeven is dat de functie $f_p(x) = x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 + px$ een extreme waarde heeft voor $x = 1$. Gevraagd wordt de andere extreme waarde exact te berekenen.

Je gaat als volgt te werk.

- Bereken $f_p'(x)$. Je krijgt $f_p'(x) = 3x^2 - 15x + p$.
- Er moet gelden $f_p'(1) = 0$, dus $3 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + p = 0$.
  Dit geeft $p = 12$, dus $f_{12}'(x) = 3x^2 - 15x + 12$.
- Los de vergelijking $f_{12}'(x) = 0$ op.
  $3x^2 - 15x + 12 = 0$
  $x^2 - 5x + 4 = 0$
  $(x - 1)(x - 4) = 0$
  $x = 1 \vee x = 4$
- Schets de grafiek van f_{12}. Zie hiernaast.
  Er is een minimum voor $x = 4$, dus je krijgt min. is $f_{12}(4) = -8$.



figuur 16.16

Er wordt gesteld dat het punt waar de buigraaklijn van de grafiek van $f_p(x) = x^3 - 7\frac{1}{2}x^2 + px$ de y-as snijdt onafhankelijk is van p.

Om dit te bewijzen ga je als volgt te werk.

- Bereken $f_p''(x)$. Je krijgt $f_p''(x) = 6x - 15$.
- Los op $f_p''(x) = 0$. Je krijgt $x = 2\frac{1}{2}$. Dus $x_{\text{buigpunt}} = 2\frac{1}{2}$.
- Druk $f_p\left(2\frac{1}{2}\right)$ en $f_p'\left(2\frac{1}{2}\right)$ uit in p.
  Je krijgt $f_p\left(2\frac{1}{2}\right) = -31\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}p$ en $f_p'\left(2\frac{1}{2}\right) = -18\frac{3}{4} + p$.
- Bereken b in de vergelijking $y = ax + b$ van de buigraaklijn.

$$\left.\begin{array}{l} y = \left(-18\frac{3}{4} + p\right)x + b \\ \text{door } \left(2\frac{1}{2}, -31\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}p\right) \end{array}\right\} \left(-18\frac{3}{4} + p\right) \cdot 2\frac{1}{2} + b = -31\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}p$$

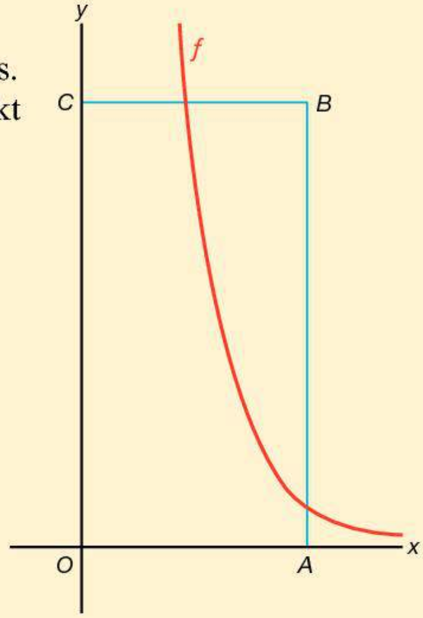
$$-46\frac{7}{8} + 2\frac{1}{2}p + b = -31\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}p$$

$$b = 15\frac{5}{8}$$

- Trek de conclusie.
  De buigraaklijn snijdt de y-as in het punt $\left(0, 15\frac{5}{8}\right)$ en dit is onafhankelijk van p.

16

In figuur 16.17 is de grafiek van $f(x) = \dfrac{2}{3x^3}$ met $x > 0$ getekend.
Van de rechthoek $OABC$ is $A(p, 0)$, $B(p, 2p)$ en ligt C op de y-as.
Om te berekenen voor welke waarde van p de diagonaal AC raakt aan de grafiek van f ga je als volgt te werk.
Lijn AC door $A(p, 0)$ en $C(0, 2p)$, dus AC: $y = -2x + 2p$.
Voor raken moet gelden $f'(x) = \text{rc}_{AC}$, dus $f'(x) = -2$.
$f(x) = \dfrac{2}{3x^3} = \frac{2}{3}x^{-3}$ geeft $f'(x) = -2x^{-4} = -\dfrac{2}{x^4}$, dus $-\dfrac{2}{x^4} = -2$
en dit geeft $x^4 = 1$, dus $x = 1$ $(x > 0)$.
$f(1) = \frac{2}{3}$, dus het raakpunt is $\left(1, \frac{2}{3}\right)$.
Zo krijg je $-2 \cdot 1 + 2p = \frac{2}{3}$
$2p = 2\frac{2}{3}$
$p = 1\frac{1}{3}$.
Dus de diagonaal AC raakt de grafiek van f als $p = 1\frac{1}{3}$.



figuur 16.17

Kromme door toppen
Bij het opstellen van een formule van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van de functies f_p liggen, ga je als volgt te werk.

- Bereken $f_p'(x)$.
- Gebruik de vergelijking $f_p'(x) = 0$ om p uit te drukken in x.
- Vul de gevonden p in bij de formule van f_p.

Bij een tweedegraadsfunctie kun je de formule $x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a}$ gebruiken om p in x_{top} uit te drukken.

Zo krijg je bij de functies $f_p(x) = px^2 - 4x + p$
$x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2p} = \dfrac{2}{p}$, dus $p = \dfrac{2}{x}$ en dit geeft de kromme
$y = \dfrac{2}{x} \cdot x^2 - 4x + \dfrac{2}{x} = 2x - 4x + \dfrac{2}{x} = -2x + \dfrac{2}{x}$.

Bij de functies $f_p(x) = px^3 - 4x + p$ krijg je $f_p'(x) = 3px^2 - 4$,
dus $f_p'(x) = 0$ geeft $3px^2 - 4 = 0$ en dit geeft $p = \dfrac{4}{3x^2}$.
Invullen van $p = \dfrac{4}{3x^2}$ in $f_p(x) = px^3 - 4x + p$ geeft
$y = \dfrac{4}{3x^2} \cdot x^3 - 4x + \dfrac{4}{3x^2} = \frac{4}{3}x - 4x + \dfrac{4}{3x^2} = -2\frac{2}{3}x + \dfrac{4}{3x^2}$.
Dus de kromme waarop alle toppen liggen is $y = -2\frac{2}{3}x + \dfrac{4}{3x^2}$.

Oppervlakte en inhoud

In figuur 16.18 is de grafiek van $f(x) = \dfrac{27}{x\sqrt{x}}$ getekend en het vierkant $OABC$ met $A(8, 0)$ en $C(0, 8)$. Om exact de oppervlakte van het gekleurde vlakdeel V te berekenen ga je als volgt te werk.

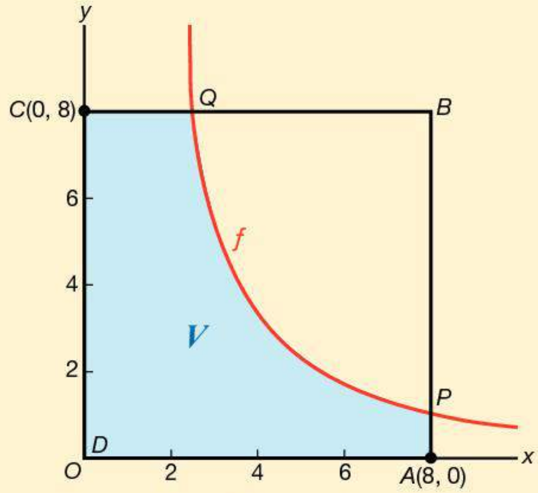
$f(x) = 8$ geeft $\dfrac{27}{x\sqrt{x}} = 8$, dus $x\sqrt{x} = \frac{27}{8}$ ofwel

$x^{1\frac{1}{2}} = \left(1\frac{1}{2}\right)^3$ en dit geeft $x = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$, dus $x_Q = 2\frac{1}{4}$.

$$O(V) = 2\tfrac{1}{4} \cdot 8 + \int_{2\frac{1}{4}}^{8} \frac{27}{x\sqrt{x}}\,dx = 18 + \int_{2\frac{1}{4}}^{8} 27 \cdot x^{-1\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 18 + \left[\frac{27}{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\right]_{2\frac{1}{4}}^{8} = 18 + \left[\frac{-54}{\sqrt{x}}\right]_{2\frac{1}{4}}^{8}$$

$$= 18 - \frac{54}{\sqrt{8}} + \frac{54}{\sqrt{2\frac{1}{4}}} = 18 - \frac{54}{2\sqrt{2}} + 36 = 54 - 13\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$



figuur 16.18 $f(x) = \dfrac{27}{x\sqrt{x}}$

Om algebraïsch de inhoud te berekenen van het lichaam L dat ontstaat als het vlakdeel V wentelt om de x-as ga je als volgt te werk.

$$I(L) = I_{\text{cilinder}} + \pi\int_{2\frac{1}{4}}^{8} (f(x))^2\,dx = \pi \cdot 8^2 \cdot 2\tfrac{1}{4} + \pi\int_{2\frac{1}{4}}^{8} \left(\frac{27}{x\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

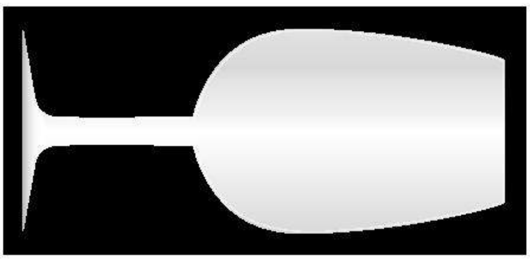
$$= 144\pi + \pi\int_{2\frac{1}{4}}^{8} \frac{729}{x^3}\,dx = 144\pi + \pi\int_{2\frac{1}{4}}^{8} 729 \cdot x^{-3}dx$$

$$= 144\pi + \pi\left[\frac{-729}{2x^2}\right]_{2\frac{1}{4}}^{8} = 144\pi - \frac{729\pi}{128} + \frac{729\pi}{10\frac{1}{8}} \approx 661$$

8 2012-I

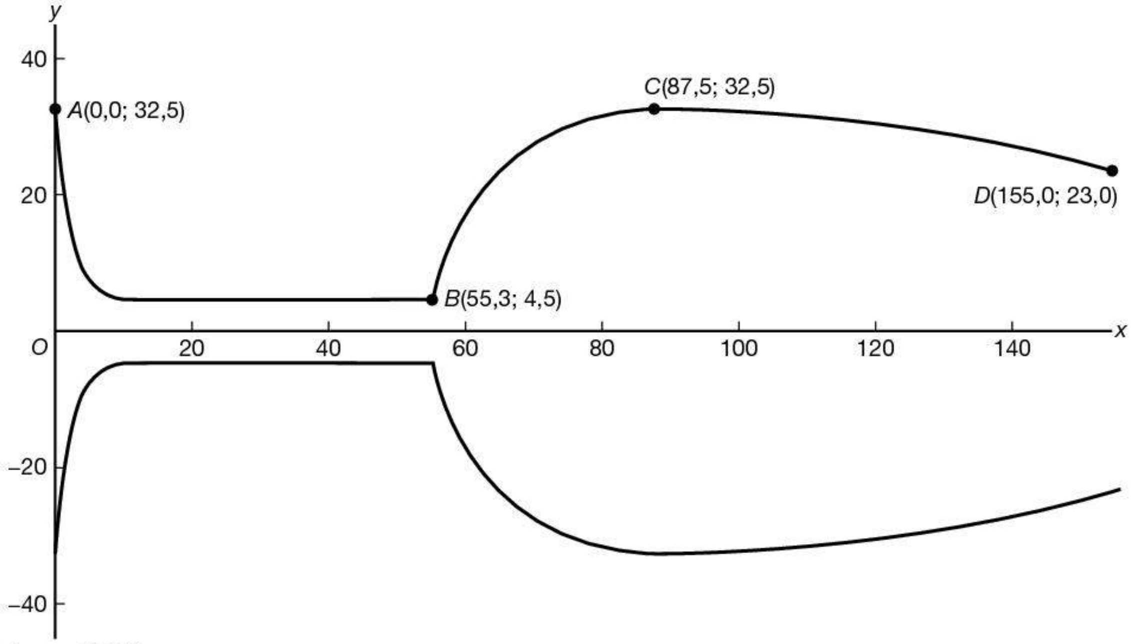
Bij het proeven van wijn kan de vorm van het glas ongewenste effecten geven. Zo zal de wijn er in een breed glas donkerder uitzien dan in een smal glas. De breedte van het glas heeft ook invloed op de geur van de wijn. Daarom is voor het proeven van wijn een standaard proefglas ontwikkeld: het ISO Standard Wine Tasting Glass. De eisen die aan dit standaard proefglas worden gesteld, zijn vastgelegd in een ISO-rapport. Aan de hand van de gegevens in dit rapport heeft een technisch tekenaar een model van het standaard proefglas getekend. Een zijaanzicht van dit model zie je in figuur 16.19.

Om dit model te maken heeft de tekenaar drie wiskundige functies gebruikt. De bijbehorende grafieken beschrijven de buitenkant van het glas. Door deze grafieken om de x-as te wentelen, ontstaat een model van het standaard proefglas.



figuur 16.19

In figuur 16.20 zijn de drie grafieken en hun spiegelbeelden in de x-as getekend.



figuur 16.20

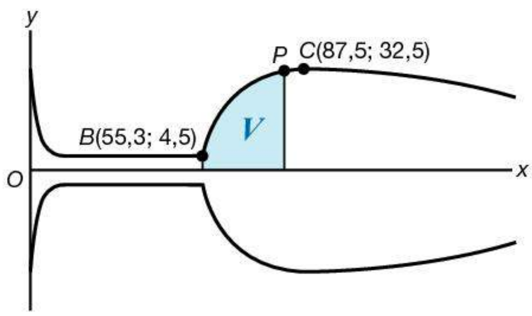
Kromme AB is de grafiek van de functie f met $f(x) = 4{,}5 + 28{,}0 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0,0; 55,3], hierbij zijn $f(x)$ en x in mm. Door kromme AB te wentelen om de x-as ontstaan de buitenkant van de voet en de steel van het wijnglas. De voet en de steel zijn massief.

a Bereken het volume van de voet en de steel samen. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm^3.

Om CD te tekenen wordt een bergparabool gebruikt met C als top.

b Stel een formule op voor kromme CD.

In figuur 16.21 zijn opnieuw de drie grafieken en hun spiegelbeelden in de x-as getekend. Voor het proeven van wijn wordt een glas bij voorkeur met 50 mL wijn gevuld. Daarom wil de tekenaar in figuur 16.21 het punt aangeven tot waar het standaard proefglas gevuld moet worden om 50 mL wijn te bevatten. Dit punt P ligt op kromme BC.



figuur 16.21

Kromme BC is de grafiek van de functie g met $g(x) = \sqrt{-x^2 + 175x - 6600}$ op het domein [55,3; 87,5], hierbij zijn $g(x)$ en x in mm.

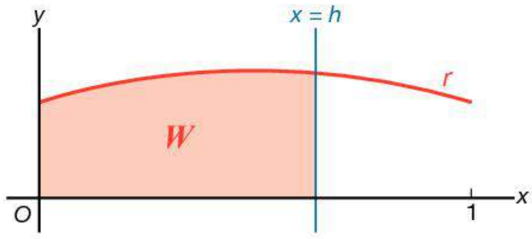
In figuur 16.21 is het vlakdeel V blauw gemaakt dat wordt begrensd door de verticale lijnen door B en door P, de x-as en kromme BP.

Als V wordt gewenteld om de x-as, heeft het omwentelingslichaam dus een inhoud die overeenkomt met 50 mL. Hierbij wordt de dikte van het glas verwaarloosd.

c Bereken met behulp van primitiveren de x-coördinaat van P. Rond je antwoord af op een geheel getal.

9 **2012-II**

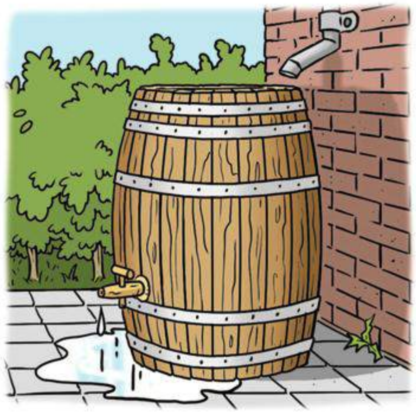
Op het domein [0, 1] is de functie r gegeven door $r(x) = \frac{1}{10}\sqrt{5 + 15x - 15x^2}$.
W is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de x-as, de y-as, de grafiek van r en de lijn $x = h$, met $0 < h \leq 1$. Zie figuur 16.22.
Voor het volume V van het omwentelingslichaam dat ontstaat door vlakdeel W om de x-as te wentelen, geldt $V = \frac{\pi}{40}\left(2h + 3h^2 - 2h^3\right)$.



figuur 16.22

a Toon aan dat deze formule voor V juist is.

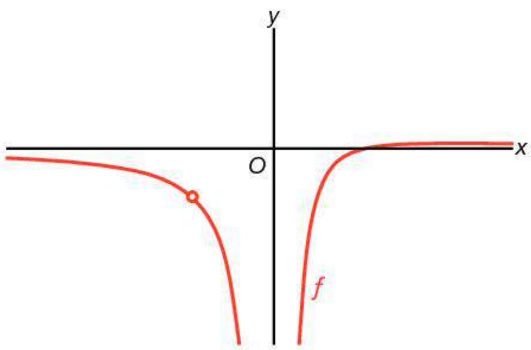
Als de grafiek van r om de x-as gewenteld wordt, ontstaat een figuur die lijkt op een regenton. Voor x, h en r nemen we de meter als eenheid, zodat de ton 1 meter hoog is. V is dus het volume van het water in de ton als het water h meter hoog staat.



b Bereken de waterhoogte in de ton als deze voor drie vierde deel is gevuld. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

10 **2012-II**

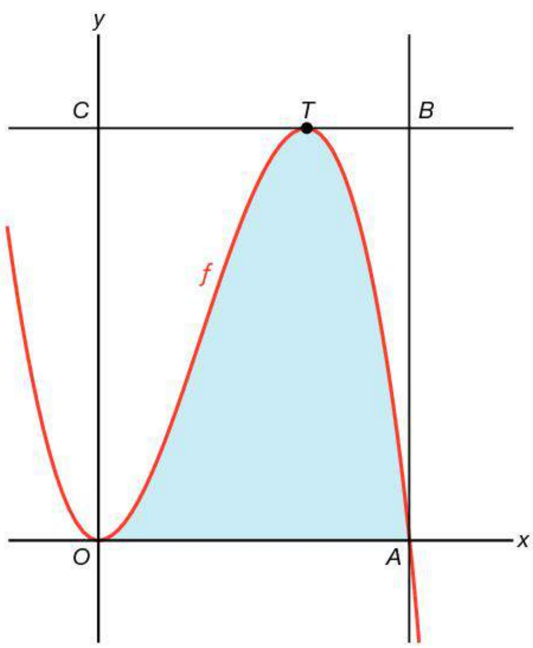
De functie f wordt gegeven door
$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2}$ met $x \neq -2$ en $x \neq 0$.
De grafiek van f heeft een perforatie. In de figuur is de grafiek van f met de perforatie getekend.
De raaklijn aan de grafiek in het snijpunt van de grafiek met de x-as gaat door de perforatie.
Toon dit aan met behulp van differentiëren.



figuur 16.23

11 **2012-II**

Voor elke positieve waarde van p is een functie f gegeven door $f(x) = -x^3 + 3px^2$.
De grafiek van f heeft twee punten met de x-as gemeenschappelijk, $O(0, 0)$ en punt A. Zie figuur 16.24.
De top van de grafiek van f die rechts van de y-as ligt, noemen we T. De horizontale lijn door T snijdt de y-as in punt C en snijdt de verticale lijn door A in punt B. De oppervlakte van het gebied onder de grafiek van f binnen rechthoek $OABC$ is in de figuur blauw gemaakt.
Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van het blauwe gebied en de oppervlakte van rechthoek $OABC$ onafhankelijk is van p.

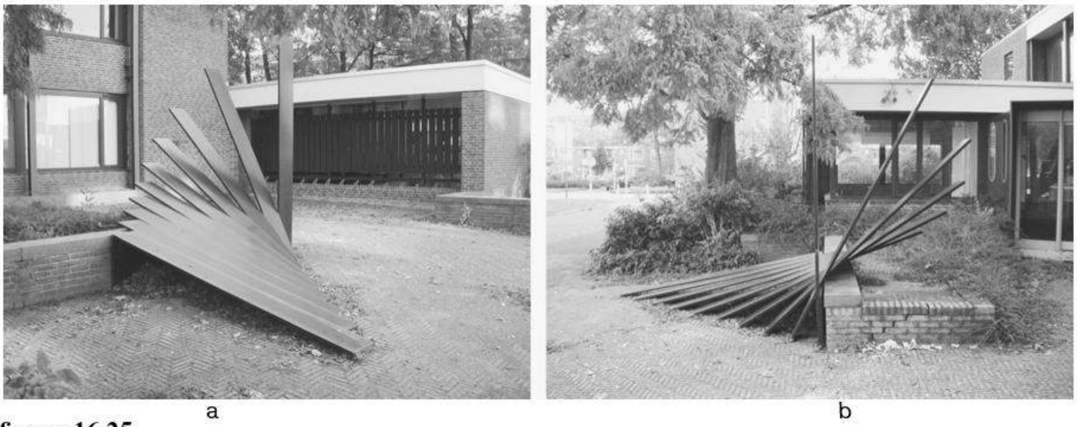


figuur 16.24

16

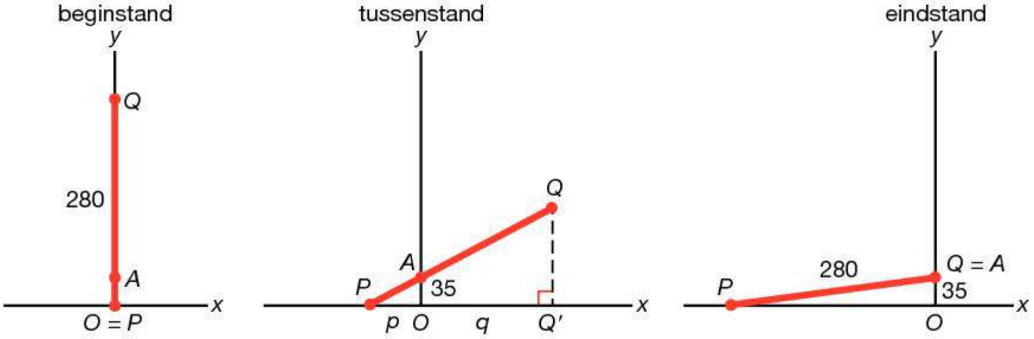
12 **2012-I**

Op de foto's hieronder zie je een kunstwerk van de Friese kunstenaar Ids Willemsma bij het voormalige Arbeidsbureau in Heerenveen.



figuur 16.25

Het kunstwerk bestaat uit een aantal naast elkaar geplaatste ijzeren platen van gelijke lengte. De voorste plaat op foto 16.25b staat verticaal op de grond tegen een muurtje. De stand van de volgende platen is ontstaan door zo'n plaat eerst verticaal tegen het muurtje te plaatsen en daarna de onderkant over de grond te verschuiven in de richting loodrecht op het muurtje. De platen steunen steeds op de bovenkant van het muurtje.
Om te voorkomen dat voorbijgangers zich stoten aan het kunstwerk, willen we weten hoe ver de bovenkant van een verschoven plaat maximaal in horizontale richting kan uitsteken.
In deze opgave kijken we naar een model met één plaat met lengte 280 cm die steeds schuiner tegen een muurtje met hoogte 35 cm komt te staan. In dit model wordt de plaat voorgesteld door een lijnstuk PQ. Zie de figuur 16.26. Het punt waar PQ op de bovenrand van het muurtje steunt, noemen we A. We brengen een assenstelsel aan met de x-as horizontaal door P en de y-as verticaal door A. Langs beide assen nemen we als eenheid 1 cm. De coördinaten van A zijn dus (0, 35).
In de verticale beginstand van PQ bevindt punt P zich in de oorsprong en is Q het punt (0, 280). Punt P wordt over de x-as naar links geschoven, terwijl lijnstuk PQ door punt A blijft gaan. In de figuur zijn de beginstand, een tussenstand en de eindstand van lijnstuk PQ getekend.



figuur 16.26

De loodrechte projectie van Q op de x-as noemen we Q'.
De afstand van P tot de oorsprong noemen we p en de afstand van Q' tot de oorsprong noemen we q. Zie figuur 16.26.
Uitgaande van de getekende tussenstand kan q, met behulp van gelijke verhoudingen in gelijkvormige driehoeken, als volgt worden uitgedrukt in p: $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2 + 1225}} - p$.

a Toon aan dat deze formule juist is.

Als we q beschouwen als functie van p, dan geldt voor de afgeleide $q'(p) = \dfrac{343\,000}{(p^2 + 1225) \cdot \sqrt{p^2 + 1225}} - 1$.

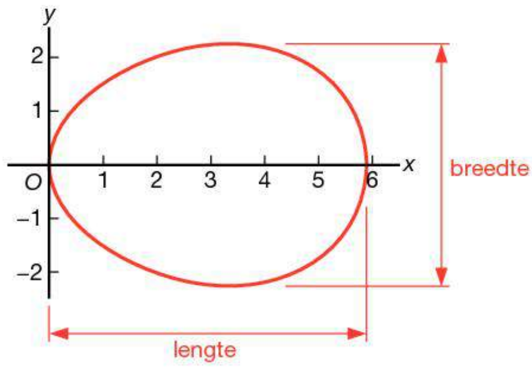
b Toon dit aan.

c Bereken exact het maximum van q.

13 **2013-I**

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{87x - 3x^2 - 2x^3}$. In figuur 16.27 is de grafiek van f getekend en ook het spiegelbeeld hiervan in de x-as. De twee grafieken vormen samen een figuur die lijkt op een doorsnede van een ei.

Op de x-as en de y-as is de eenheid 1 cm. In de figuur is aangegeven wat bedoeld wordt met de lengte en de breedte van het ei. De lengte van het ei is ongeveer 5,9 cm.



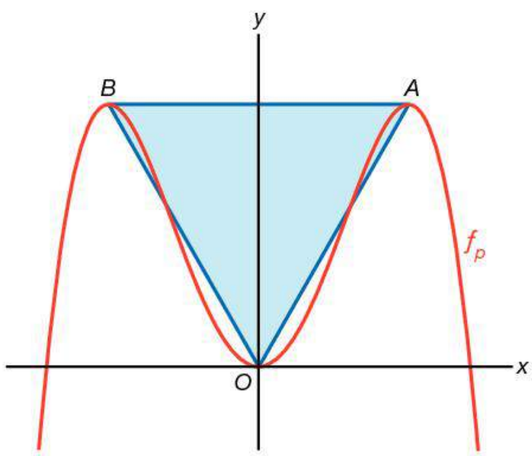
figuur 16.27

a Bereken op algebraïsche wijze de lengte van het ei in cm. Rond je antwoord af op twee decimalen.

b Bereken met behulp van primitiveren de inhoud van het ei. Geef je antwoord in een geheel aantal cm^3.

14 **2013-I**

Voor elke positieve waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 2x^2 - px^4$.
De grafiek van f_p heeft de y-as als symmetrieas. Verder heeft deze grafiek drie toppen, het punt $O(0, 0)$ en de punten A en B. Zie figuur 16.28.
Deze drie punten zijn de hoekpunten van driehoek OAB, waarbij de coördinaten van de punten A en B afhankelijk zijn van de waarde van p. Driehoek OAB is in de figuur blauw gemaakt.
Er is één waarde van p waarbij de lengte van lijnstuk OA gelijk is aan de lengte van lijnstuk AB.
Bereken exact deze waarde van p.



figuur 16.28

15 **2013-II**

Zuurstof wordt in het menselijk lichaam getransporteerd door de hemoglobine in het bloed. De zuurstof wordt in de longen aan de hemoglobine gebonden en in de weefsels weer afgegeven. Het percentage van de hemoglobine dat zuurstof aan zich bindt, wordt de *verzadigingsgraad van hemoglobine* genoemd. Deze verzadigingsgraad hangt af van de *partiële zuurstofdruk*; dit is het deel van de totale luchtdruk in de longen dat veroorzaakt wordt door de zuurstof.

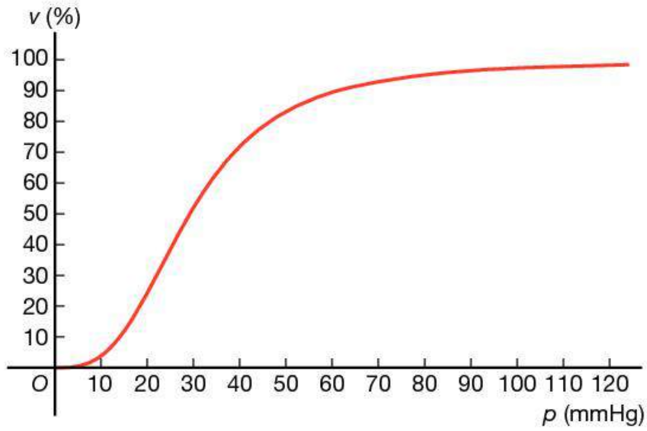
In 1910 heeft de fysioloog Hill gevonden dat onder bepaalde omstandigheden het verband tussen de partiële zuurstofdruk p en de verzadigingsgraad v van hemoglobine kan worden benaderd met de formule $v = \dfrac{100p^3}{p^3 + 25\,000}$.

Hierin is v de verzadigingsgraad van hemoglobine in procenten en p de partiële zuurstofdruk in mmHg (millimeter kwik, de toen gebruikte eenheid voor druk).

a Bereken de partiële zuurstofdruk als de verzadigingsgraad van hemoglobine 75% is. Rond je antwoord af op een geheel aantal mmHg.

In figuur 16.29 is de grafiek getekend van v als functie van p volgens de benaderingsformule van Hill.

b Bereken met behulp van de afgeleide functie van v voor welke waarde van p de grafiek het steilst is. Rond je antwoord af op een gehele waarde.



figuur 16.29

Hill vond zijn formule doordat hij ontdekte dat $\dfrac{v}{100 - v}$ evenredig is met p^3. De evenredigheidsconstante is $4 \cdot 10^{-5}$. Dat wil zeggen $\dfrac{v}{100 - v} = 0{,}00004p^3$.

c Herleid de formule $\dfrac{v}{100 - v} = 0{,}00004p^3$ tot de formule $v = \dfrac{100p^3}{p^3 + 25000}$.

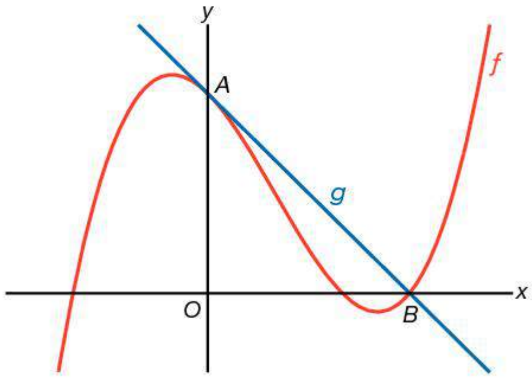
16 2013-II

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1\frac{1}{2})$ en $g(x) = -x + 1\frac{1}{2}$. De grafieken van f en g snijden beide de y-as in het punt $A(0, 1\frac{1}{2})$ en de x-as in het punt $B(1\frac{1}{2}, 0)$. De grafiek van g raakt in punt A aan de grafiek van f.

a Toon dit aan met behulp van differentiëren.

In de figuur hiernaast zijn de grafieken van f en g getekend. De grafiek van f verdeelt driehoek OAB in twee delen.

b Toon met een exacte berekening aan dat de oppervlakte van het linkerdeel twee keer zo groot is als de oppervlakte van het rechterdeel.



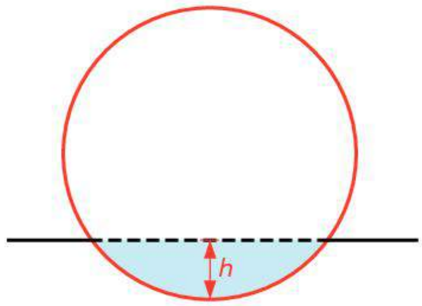
figuur 16.30

De functie h is gegeven door $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

c Bereken exact de coördinaten van de perforatie en stel vergelijkingen op van de asymptoten van de grafiek van h.

17 2014-I

Een bal met een straal van 11 cm komt in een sloot terecht en blijft drijven. Het laagste punt van de bal bevindt zich h cm onder het wateroppervlak. In figuur 16.31 zie je een doorsnede van de situatie. Het deel van de bal onder het wateroppervlak is daarin blauw gemaakt.

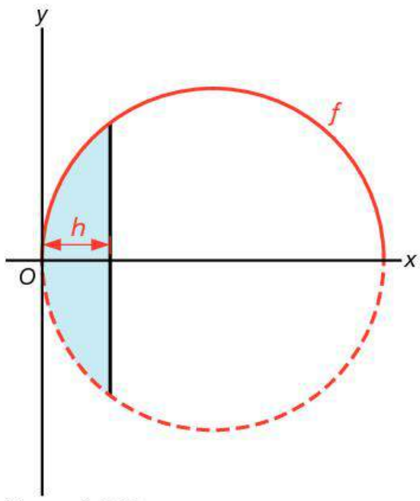


figuur 16.31

Om het rekenwerk te vereenvoudigen, draaien we de figuur een kwartslag. Vervolgens kiezen we een assenstelsel zodanig dat de halve cirkel boven de x-as de grafiek is van de functie f met $f(x) = \sqrt{22x - x^2}$. Hierbij zijn x en $f(x)$ in cm. Zie figuur 16.32.

Het deel van de bal onder het wateroppervlak is op te vatten als een omwentelingslichaam dat ontstaat bij wenteling van een deel van de grafiek van f om de x-as. Voor de inhoud I in cm^3 van het deel van de bal onder het wateroppervlak geldt $I = \pi h^2(11 - \frac{1}{3}h)$.

a Bewijs dat deze formule juist is.



figuur 16.32

De massa van de bal is 425 gram. Uit de natuurkunde is bekend dat de massa van een drijvende bal even groot is als de massa van het door de bal weggedrukte water. Neem aan dat 1 cm^3 water een massa van 1 gram heeft.

b Bereken hoe diep de drijvende bal in het water ligt. Rond je antwoord af op een geheel aantal millimeters.

16

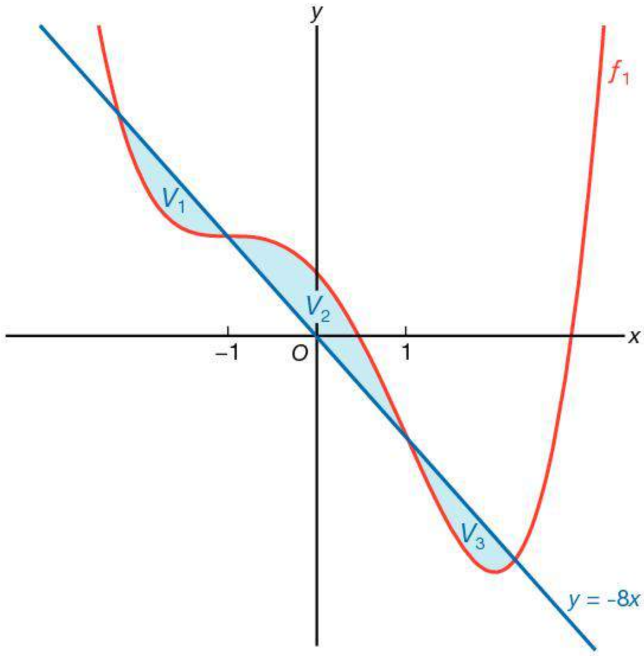
18 **2014-I**

Voor elke waarde van p met $p \neq 0$ is een functie f_p gegeven waarbij voor de tweede afgeleide geldt $f_p''(x) = 12(x - p)(x + p)$.
Er geldt $f_p(x) = x^4 - 6p^2x^2 + ax + b$ met a en b constanten.

a Toon dit aan met primitiveren.

Voor $a = -8$ en $b = 5$ wordt f_1 gegeven door $f_1(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 5$. In figuur 16.33 zie je de grafiek van f_1. Deze grafiek heeft buigpunten voor $x = -1$ en $x = 1$. De lijn door deze buigpunten heeft vergelijking $y = -8x$. Deze lijn en de grafiek van f_1 begrenzen drie vlakdelen V_1, V_2 en V_3 die om en om onder en boven de lijn liggen.
De lijn met vergelijking $y = -8x$ snijdt de grafiek van f_1 niet alleen in de twee buigpunten, maar ook in twee andere punten.

b Bereken exact de x-coördinaten van de twee andere snijpunten.



figuur 16.33

De vlakdelen V_1 en V_3 hebben gelijke oppervlakte, namelijk $3\frac{1}{5}$.

c Bewijs dat de gezamenlijke oppervlakte van V_1 en V_3 gelijk is aan de oppervlakte van V_2.

19 **2014-II**

De functies f en g zijn gegeven door

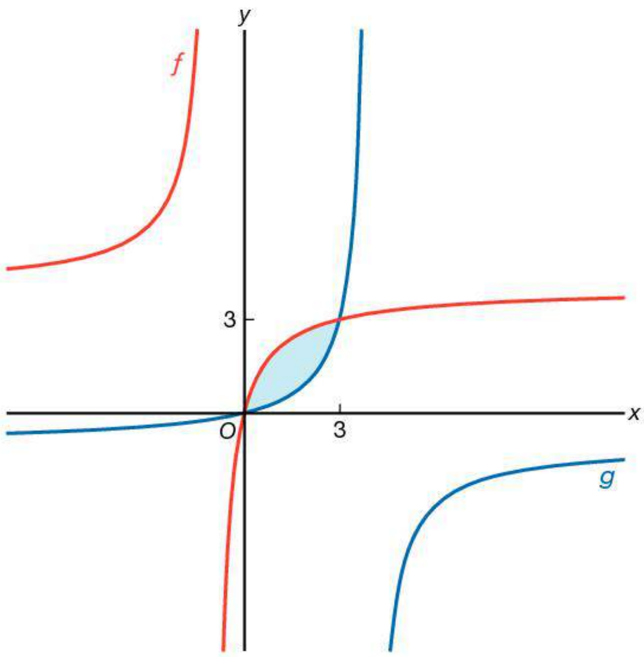
$$f(x) = 4 - \frac{4}{x+1} \text{ en } g(x) = \frac{x}{4-x}.$$

In figuur 16.34 zijn de grafieken van f en g weergegeven. De functie g is de inverse van f.

a Bewijs dit.

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten (0, 0) en (3, 3). De grafieken sluiten een vlakdeel in. Dit vlakdeel is in de figuur blauw gemaakt.

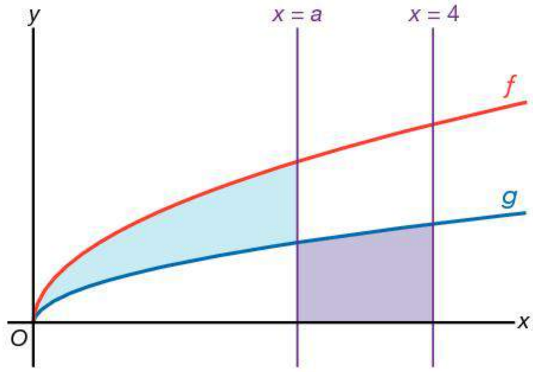
b Bereken exact de oppervlakte van dit vlakdeel.



figuur 16.34

20 **2015-I**

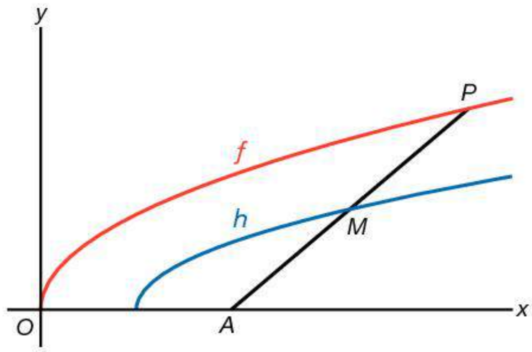
In figuur 16.35 zijn de grafieken getekend van de functies f en g gegeven door $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Verder zijn de lijnen getekend met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$, met $0 < a < 4$. Er zijn twee vlakdelen gekleurd. Het blauwe vlakdeel wordt begrensd door de grafieken van f en g en de lijn met vergelijking $x = a$. Het paarse vlakdeel wordt begrensd door de grafiek van g, de x-as en de lijnen met vergelijkingen $x = a$ en $x = 4$.



figuur 16.35

a Bereken exact voor welke waarde van a deze gekleurde vlakdelen gelijke oppervlakte hebben.

Gegeven is het punt $A(2, 0)$. Bij elk punt P op de grafiek van f kan het midden van lijnstuk AP worden bepaald. Dat midden noemen we M. Verder is de functie h gegeven door $h(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$. In figuur 16.36 zijn de grafieken van f en h getekend. Ook is voor een punt P het lijnstuk AP met midden M getekend. Er geldt: voor elk punt P op de grafiek van f ligt het punt M op de grafiek van h.



figuur 16.36

b Bewijs dit.

21 **2015-I**

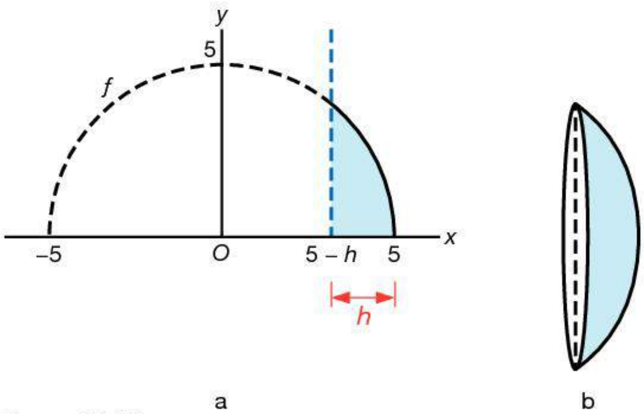
De functie f wordt gegeven door $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. De grafiek van f is een halve cirkel met middelpunt $O(0, 0)$ en straal 5.

Voor de functie f geldt $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \dfrac{5}{\sqrt{25 - x^2}}$.

a Bewijs dit.

In figuur 16.37a is de grafiek van f getekend. We bekijken het deel van de grafiek tussen $x = 5 - h$ en $x = 5$. Door dit gedeelte te wentelen om de x-as ontstaat het bolsegment met dikte h. Zie figuur 16.37b. Voor de blauw gemaakte oppervlakte A van het bolsegment, dus zonder de oppervlakte van de cirkelvormige linkerkant, geldt

$$A = 2\pi \cdot \int_{5-h}^{5} f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$ Met behulp van deze integraal kan exact worden berekend dat $A = 10\pi h$.



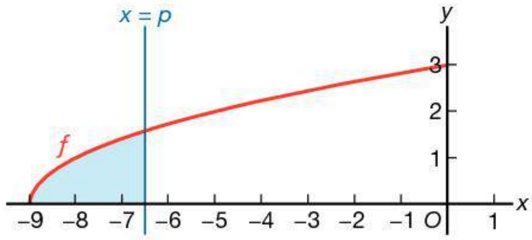
figuur 16.37

b Bewijs dat $A = 10\pi h$.

22 **2015-II**

Op het domein $[-9, 0]$ is de functie f gegeven door $f(x) = \sqrt{x+9}$. In figuur 16.38 is de grafiek van f getekend en een lijn met vergelijking $x = p$ met $-9 < p \leq 0$. Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en deze lijn is blauw gekleurd. De oppervlakte van het blauwe gebied noemen we A. De waarde van A hangt af van de waarde van p. Er geldt $A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$.

a Bewijs dat $A(p) = \frac{2}{3}(p+9)^{\frac{3}{2}}$.



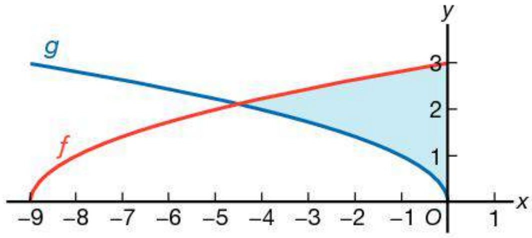
figuur 16.38

Er is een waarde van p waarvoor $A(p)$ het achtste deel is van de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de y-as.

b Bereken exact deze waarde van p.

De grafiek van f wordt gespiegeld in de y-as. Het spiegelbeeld van de grafiek van f wordt vervolgens 9 naar links verschoven. Zo ontstaat de grafiek van de functie g. Zie figuur 16.39. In figuur 16.39 is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de grafiek van g en de y-as blauw gekleurd. Dit vlakdeel wordt gewenteld om de x-as.

c Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.



figuur 16.39

16

16.3 Exponenten en logaritmen

Exponentiële vergelijkingen exact oplossen

- Veel exponentiële vergelijkingen zijn op te lossen door toe te werken naar de vorm $g^A = g^B$ en dan te gebruiken dat uit $g^A = g^B$ volgt $A = B$.
  Een voorbeeld hiervan is de vergelijking $4^{2x-3} = 32$.
  Bij de vergelijking $2^{x+3} + 2^x = 27$ werk je toe naar de vorm $2^x = c$. Daarna gebruik je $x = {}^2\log(c)$.

$4^{2x-3} = 32$
$(2^2)^{2x-3} = 2^5$
$2^{4x-6} = 2^5$
$4x - 6 = 5$
$4x = 11$
$x = 2\frac{3}{4}$

$2^{x+3} + 2^x = 27$
$2^x \cdot 2^3 + 2^x = 27$
$8 \cdot 2^x + 2^x = 27$
$9 \cdot 2^x = 27$
$2^x = 3$
$x = {}^2\log(3)$

- Sommige exponentiële vergelijkingen zijn op te lossen met behulp van een substitutie.

$2^x + \dfrac{10}{2^x} = 7$
Stel $2^x = u$.
$u + \dfrac{10}{u} = 7$
$u^2 + 10 = 7u$
$u^2 - 7u + 10 = 0$
$(u-2)(u-5) = 0$
$u = 2 \vee u = 5$
$2^x = 2 \vee 2^x = 5$
$x = 1 \vee x = {}^2\log(5)$

$e^{2x} + e^x = 20$
$(e^x)^2 + e^x = 20$
Stel $e^x = u$.
$u^2 + u = 20$
$u^2 + u - 20 = 0$
$(u-4)(u+5) = 0$
$u = 4 \vee u = -5$
$e^x = 4 \vee e^x = -5$
$x = \ln(4)$ geen opl.
Dus $x = \ln(4)$.

Logaritmische vergelijkingen exact oplossen

- Oplossen door gebruik te maken van de regel uit ${}^g\log(x) = y$ volgt $x = g^y$.

$2 + {}^3\log(4x-1) = 4$
${}^3\log(4x-1) = 2$
$4x - 1 = 3^2$
$4x = 10$
$x = 2\frac{1}{2}$

$\ln^2(x) = 2\frac{1}{4}$
$\ln(x) = 1\frac{1}{2} \vee \ln(x) = -1\frac{1}{2}$
$x = e^{1\frac{1}{2}} \vee x = e^{-1\frac{1}{2}}$
$x = e\sqrt{e} \vee x = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$

16

- Oplossen door toe te werken naar de vorm ${}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(B)$ en dan te gebruiken uit ${}^{g}\log(A) = {}^{g}\log(B)$ volgt $A = B$.
Vaak heb je hierbij de rekenregels voor logaritmen nodig.
Hieronder staan deze rekenregels voor natuurlijke logaritmen, maar ze gelden voor elk grondtal $g > 0$ en $g \neq 1$.

Voor $a > 0$ en $b > 0$ geldt

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$	${}^{g}\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(g)}$
$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$	$e^{\ln(a)} = a$
$n \cdot \ln(a) = \ln(a^n)$	$\ln(e^a) = a$

16

${}^{\frac{1}{g}}\log(a) = -{}^{g}\log(a)$

$2 \cdot {}^{4}\log(x) = 3 - {}^{\frac{1}{2}}\log(x - 1)$

$2 \cdot \dfrac{{}^{2}\log(x)}{{}^{2}\log(4)} = {}^{2}\log(8) + {}^{2}\log(x - 1)$

$2 \cdot \dfrac{{}^{2}\log(x)}{2} = {}^{2}\log(8x - 8)$

${}^{2}\log(x) = {}^{2}\log(8x - 8)$

$x = 8x - 8$

$-7x = -8$

$x = 1\frac{1}{7}$

vold.

$\ln(x - 4) = 2 - \ln(3)$

$\ln(x - 4) = \ln(e^2) - \ln(3)$

$\ln(x - 4) = \ln\left(\frac{1}{3}e^2\right)$

$x - 4 = \frac{1}{3}e^2$

$x = 4 + \frac{1}{3}e^2$

vold.

- Oplossen met behulp van een substitutie.

$\ln^2(x) - \ln(x) = 6$

Stel $\ln(x) = u$.

$u^2 - u - 6 = 0$

$(u + 2)(u - 3) = 0$

$u = -2 \vee u = 3$

$\ln(x) = -2 \vee \ln(x) = 3$

$x = e^{-2} \vee x = e^3$

$x = \dfrac{1}{e^2} \vee x = e^3$

$\log(x) = \dfrac{6}{\log(x)} + 5$

Stel $\log(x) = u$.

$u = \dfrac{6}{u} + 5$

$u^2 - 5u - 6 = 0$

$(u + 1)(u - 6) = 0$

$u = -1 \vee u = 6$

$\log(x) = -1 \vee \log(x) = 6$

$x = \frac{1}{10} \vee x = 10^6$

Formules omwerken

Je kunt formules van de vorm ${}^g\log(N) = pt + q$ omwerken tot de vorm $N = b \cdot c^t$.

Bij $\log(N) = 0{,}35t + 2{,}22$ krijg je
$$N = 10^{0{,}35t + 2{,}22}$$
$$N = 10^{0{,}35t} \cdot 10^{2{,}22}$$
$$N = 10^{2{,}22} \cdot (10^{0{,}35})^t$$
$$N \approx 166 \cdot 2{,}24^t$$

Dus $N = 166 \cdot 2{,}24^t$.

Je kunt formules van de vorm $N = b \cdot c^t$ omwerken tot de vorm ${}^g\log(N) = pt + q$.

Bij het omwerken van de formule $N = 166 \cdot 2{,}24^t$ tot de vorm $\ln(N) = pt + q$ krijg je
$$\ln(N) = \ln(166 \cdot 2{,}24^t)$$
$$\ln(N) = \ln(166) + \ln(2{,}24^t)$$
$$\ln(N) = t \cdot \ln(2{,}24) + \ln(166)$$
$$\ln(N) \approx 0{,}81t + 5{,}11$$

Dus $\ln(N) = 0{,}81t + 5{,}11$.

Je kunt formules van de vorm ${}^g\log(y) = p + q \cdot {}^g\log(x)$ omwerken tot de vorm $y = ax^n$.

Bij $\ln(A) = 1{,}7 + 1{,}6 \ln(B)$ krijg je
$$\ln(A) = \ln(\mathrm{e}^{1{,}7}) + \ln(B^{1{,}6})$$
$$\ln(A) = \ln(\mathrm{e}^{1{,}7} \cdot B^{1{,}6})$$
$$A = \mathrm{e}^{1{,}7} \cdot B^{1{,}6}$$
$$A \approx 5{,}47B^{1{,}6}$$

Dus $A = 5{,}47B^{1{,}6}$.

Je kunt formules van de vorm $y = ax^n$ omwerken tot de vorm ${}^g\log(y) = p + q \cdot {}^g\log(x)$.

Bij het omwerken van de formule $A = 5{,}47B^{1{,}6}$ tot de vorm $\log(A) = t + q \cdot \log(B)$ krijg je
$$\log(A) = \log(5{,}47B^{1{,}6})$$
$$\log(A) = \log(5{,}47) + \log(B^{1{,}6})$$
$$\log(A) = \log(5{,}47) + 1{,}6 \log(B)$$
$$\log(A) \approx 0{,}74 + 1{,}6 \log(B)$$

Dus $\log(A) = 0{,}74 + 1{,}6 \log(B)$.

Je kunt bij de formule $N = 500 \cdot 1{,}75^t$ de variabele t vrijmaken en de formule schrijven in de vorm $t = a \ln(bN)$.

Je krijgt $1{,}75^t = 0{,}002N$
$$t = {}^{1{,}75}\log(0{,}002N)$$
$$t = \frac{\ln(0{,}002N)}{\ln(1{,}75)}$$
$$t = \frac{1}{\ln(1{,}75)} \cdot \ln(0{,}002N)$$
$$t \approx 1{,}79 \ln(0{,}002N)$$

Dus $t = 1{,}79 \ln(0{,}002N)$.

16

Je kunt bij de formule $A = 8B^{1\frac{1}{2}}$ de variabele B vrijmaken en de formule schrijven in de vorm $B = pA^q$.
Je krijgt $B^{1\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}A$

$$B = \left(\tfrac{1}{8}A\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$B = \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} \cdot A^{\frac{2}{3}}$$

$$B = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot A^{\frac{2}{3}}$$

$$B = \tfrac{1}{4}A^{\frac{2}{3}}$$

Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies
Regels voor het differentiëren.

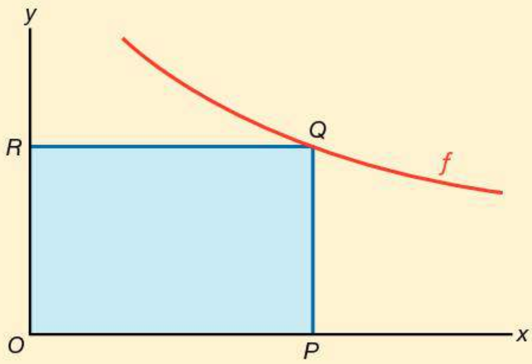
$f(x) = \mathrm{e}^x$ geeft $f'(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = a^x$ geeft $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(g)}$

Van de rechthoek $OPQR$ ligt het punt P op de x-as, het punt Q op de grafiek van $f(x) = 3 - \ln(x)$ en het punt R op de positieve y-as. Zie figuur 16.40.
Om de oppervlakte A van de rechthoek te maximaliseren stel je $x_P = p$ en druk je A uit in p.
Dit geeft $A = p(3 - \ln(p)) = 3p - p\ln(p)$.

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 3 - 1 \cdot \ln(p) - p \cdot \frac{1}{p} = 3 - \ln(p) - 1 = 2 - \ln(p)$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = 0 \text{ geeft } 2 - \ln(p) = 0 \text{ en dit geeft } p = \mathrm{e}^2.$$

De oppervlakte is maximaal voor $p = \mathrm{e}^2$.



figuur 16.40 $f(x) = 3 - \ln(x)$

Van de rechthoek $PQRS$ liggen de punten P en Q op de x-as en de punten R en S op de grafiek van $f(x) = 4 \cdot 2^{-x^2}$.
Om de oppervlakte A van de rechthoek te maximaliseren stel je $x_Q = q$ en druk je A uit in q.

Dit geeft $A = 2q \cdot 4 \cdot 2^{-q^2} = 8q \cdot 2^{-q^2}$.

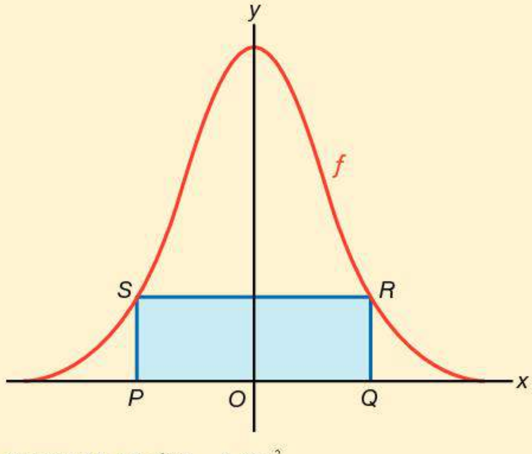
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} = 8 \cdot 2^{-q^2} + 8q \cdot 2^{-q^2} \cdot \ln(2) \cdot -2q$$

$$= 8 \cdot 2^{-q^2} - 16q^2 \cdot 2^{-q^2} \cdot \ln(2)$$

$$= 8 \cdot 2^{-q^2}(1 - 2q^2 \cdot \ln(2))$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} = 0 \text{ geeft } 1 - 2q^2 \cdot \ln(2) = 0, \text{ dus } q^2 = \frac{1}{2\ln(2)}.$$

De oppervlakte is maximaal voor $q = \sqrt{\dfrac{1}{2\ln(2)}}$.

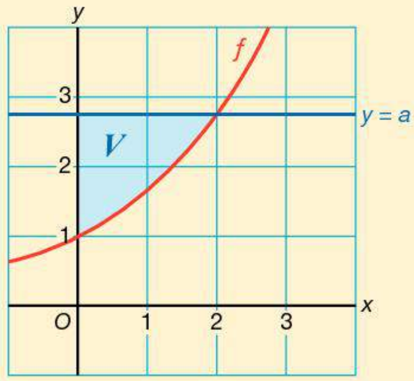


figuur 16.41 $f(x) = 4 \cdot 2^{-x^2}$

Primitieven van exponentiële en logaritmische functies
Regels voor het primitiveren.

$f(x) = e^x$ geeft $F(x) = e^x + c$
$f(x) = a^x$ geeft $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln(a)} + c$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ geeft $F(x) = \ln|x| + c$
$f(x) = \ln(x)$ geeft $F(x) = x\ln(x) - x + c$
$f(x) = {}^g\log(x)$ geeft $F(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}(x\ln(x) - x) + c$

Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, de y-as en de lijn $y = a$ met $a > 1$.
Om te berekenen voor welke waarde van a de oppervlakte van V gelijk is aan 2 ga je als volgt te werk.



figuur 16.42 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

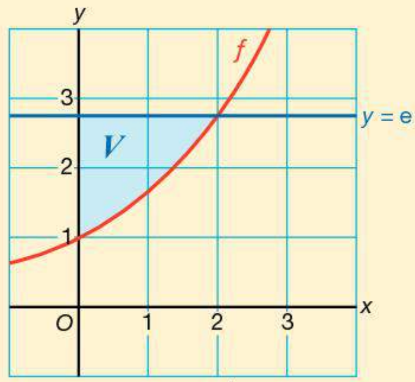
$f(x) = a$ geeft $e^{\frac{1}{2}x} = a$, dus $\frac{1}{2}x = \ln(a)$ ofwel $x = 2\ln(a)$.

$$O(V) = \int_0^{2\ln(a)} \left(a - e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \left[ax - 2e^{\frac{1}{2}x}\right]_0^{2\ln(a)}$$
$$= a \cdot 2\ln(a) - 2e^{\ln(a)} - (0 - 2e^0) = 2a\ln(a) - 2a + 2$$

$O(V) = 2$ geeft $2a\ln(a) - 2a + 2 = 2$
$2a(\ln(a) - 1) = 0$
$a = 0 \quad \vee \quad \ln(a) = 1$
vold. niet $\quad a = e$

Dus $O(V) = 2$ voor $a = e$.

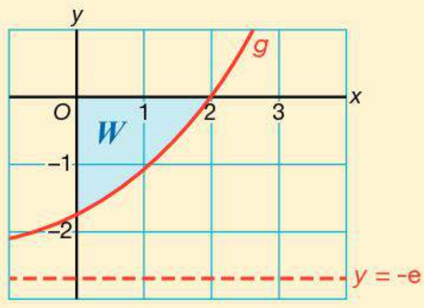
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, de y-as en de lijn $y = e$. Zie figuur 16.43.



figuur 16.43 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

Om de inhoud te berekenen van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = e$ ga je als volgt te werk.
Verschuif de grafiek van f over $(0, -e)$. Zo krijg je de grafiek van $g(x) = e^{\frac{1}{2}x} - e$ met het vlakdeel W. Zie figuur 16.44.
Wentelen van W om de x-as geeft $I(L)$.

$$I(L) = \pi\int_0^2 (g(x))^2 dx = \pi\int_0^2 \left(e^{\frac{1}{2}x} - e\right)^2 dx$$
$$= \pi\int_0^2 \left(e^x - 2e^{\frac{1}{2}x+1} + e^2\right)dx = \pi\left[e^x - 4e^{\frac{1}{2}x+1} + e^2x\right]_0^2$$
$$= \pi(e^2 - 4e^2 + 2e^2 - (e^0 - 4e^1 + 0)) = (-e^2 + 4e - 1)\pi$$



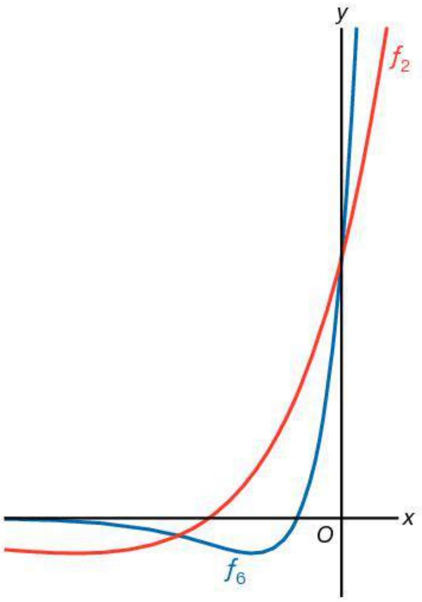
figuur 16.44 $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - e$

23 **2012-I**

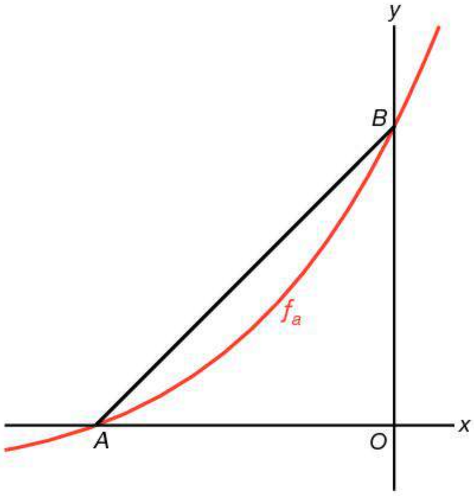
Voor elke waarde van a, met $a > 0$, is een functie f_a gegeven door $f_a(x) = (1 + ax) \cdot e^{ax}$. In figuur 16.45 zijn de grafieken van f_2 en f_6 weergegeven.

Voor elke waarde van a, met $a > 0$, heeft de grafiek van f_a een punt P_a met een horizontale raaklijn.

a Toon aan dat al deze punten P_a op één lijn liggen.



figuur 16.45



figuur 16.46

De grafiek van f_a snijdt de x-as in punt $A\left(-\frac{1}{a}, 0\right)$ en de y-as in punt $B(0,1)$. Zie figuur 16.46. De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

b Toon aan dat de verhouding van de oppervlakten van deze twee delen onafhankelijk is van a.

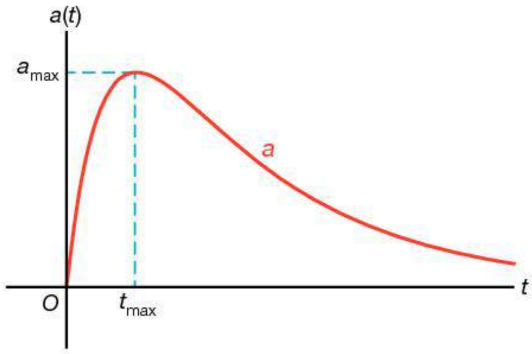
24 **2012-II**

Sommige medicijnen kennen een passieve en een actieve vorm. Ze worden in passieve vorm ingespoten en door het lichaam omgezet in actieve vorm. De hoeveelheid medicijn in passieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten nog niet is omgezet in actieve vorm, noemen we $p(t)$. Als 25 mg wordt ingespoten, geldt de formule $p(t) = 25 \cdot e^{-k \cdot t}$. Hierbij is k een positieve constante waarvan de waarde afhangt van het type medicijn. Hoe groter k, hoe sneller het medicijn in passieve vorm wordt omgezet in actieve vorm.
Om de werkzaamheid van het medicijn te onderzoeken, meet men hoe lang het duurt tot 99% van de hoeveelheid medicijn in passieve vorm is omgezet naar medicijn in actieve vorm. Deze tijdsduur t_{99} hangt af van k.

a Druk t_{99} uit in k.

Het medicijn in actieve vorm wordt door de lever afgebroken. De omzetting van medicijn in passieve vorm naar medicijn in actieve vorm en de afbraak van medicijn in actieve vorm vinden gelijktijdig plaats.
Een patiënt krijgt een injectie met een dergelijk medicijn. De hoeveelheid medicijn in actieve vorm, in milligram, die t uur na inspuiten in het lichaam zit, noemen we $a(t)$. Voor $a(t)$ geldt $a(t) = 25\left(e^{-0,1 \cdot t} - e^{-0,4 \cdot t}\right)$. In figuur 16.47 is de grafiek van a getekend.
Het maximum van a noemen we a_{max}. Dit maximum wordt aangenomen op tijdstip t_{max}.

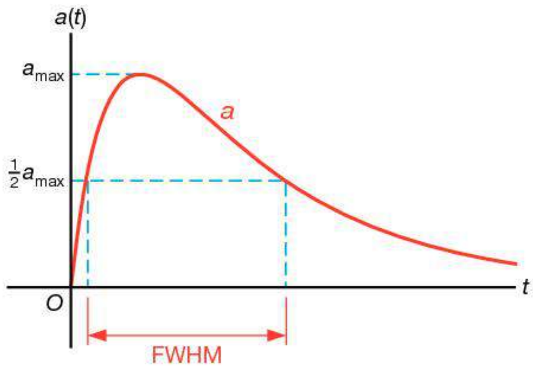
b Bereken t_{max} met behulp van differentiëren.



figuur 16.47

Als maat voor de tijdsduur die een medicijn werkzaam is, wordt gekeken naar de zogenoemde FWHM (*Full Width at Half Maximum*). Dat is de breedte van de piek in de grafiek van a ter hoogte van $\frac{1}{2}a_{max}$. Anders gezegd: de FWHM geeft aan hoe lang de hoeveelheid medicijn in actieve vorm in het lichaam minstens 50% is van de maximale hoeveelheid a_{max}. In figuur 16.48 is de FWHM aangegeven.

c Bereken de FWHM in uren nauwkeurig.



figuur 16.48

25 **2013-I**

Als een vloeistof een gesloten ruimte niet geheel opvult, dan verdampt een deel van de vloeistof. De damp oefent druk uit op de wanden van de gesloten ruimte: de *dampdruk*. De grootte van de dampdruk hangt af van de soort vloeistof en van de temperatuur in de gesloten ruimte. Voor het verband tussen de dampdruk en de temperatuur geldt de formule

$\log(P) = k - \dfrac{m}{T-n}$ met $T > n$. Hierin is P de dampdruk in bar en T de temperatuur in kelvin en zijn k, m en n constanten die afhangen van de soort vloeistof.

Voor aceton, een zeer vluchtige vloeistof, geldt (bij benadering) $k = 4{,}146$, $m = 1144$ en $n = 53{,}15$, dus

$\log(P) = 4{,}146 - \dfrac{1144}{T-53{,}15}$ met $T > 53{,}15$.

Het *kookpunt* van een vloeistof is de temperatuur waarbij de dampdruk precies 1 bar bedraagt.

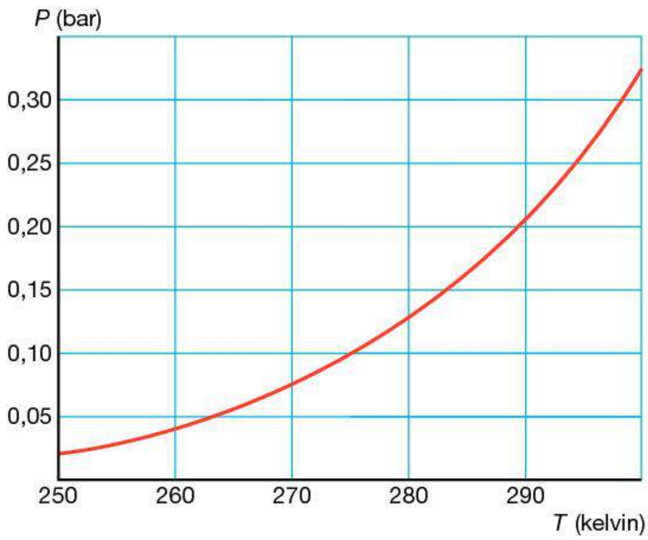
a Bereken op algebraïsche wijze het kookpunt van aceton. Rond je antwoord af op een geheel aantal kelvin.

In figuur 16.49 is voor aceton de grafiek getekend van de dampdruk P als functie van de temperatuur T voor temperaturen tussen 250 en 300 kelvin.

Uit de figuur krijgen we de indruk dat de functie P stijgend is.

b Beredeneer aan de hand van de formule zonder te differentiëren dat de functie inderdaad stijgend is.

Hoe de dampdruk bij een bepaalde temperatuur reageert op een verandering van die temperatuur, wordt weergegeven door de afgeleide waarde $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}$ in bar/kelvin.



figuur 16.49

c Bereken voor aceton de waarde van $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}$ bij een kamertemperatuur van 293 kelvin. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Voor andere stoffen dan aceton gelden soortgelijke formules, alleen de waarden van k, m en n zijn anders. De vorm van de formule is universeel en staat sinds 1888 bekend als de *vergelijking van Antoine*. In de tijd dat Antoine de vergelijking opstelde, gebruikte men voor de dampdruk nog de eenheid mmHg (millimeter kwik) in plaats van bar. Voor de temperatuur gebruikte men de eenheid °C (graden Celsius) in plaats van kelvin.

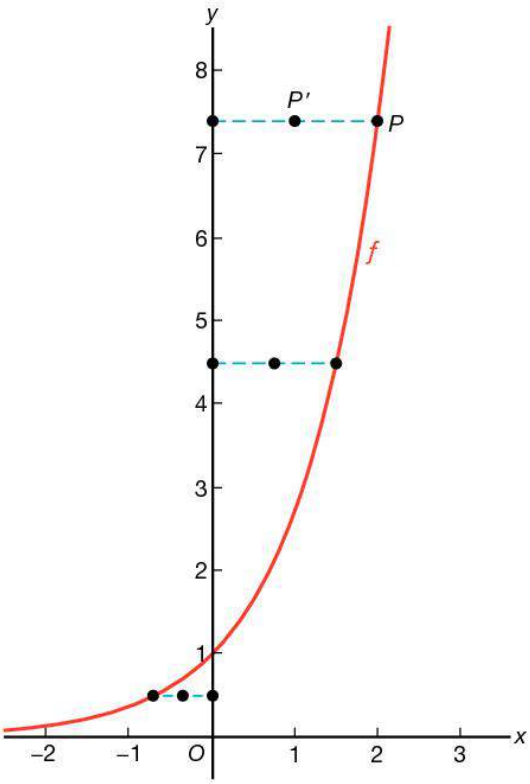
Voor het verband tussen de dampdruk p in mmHg en de dampdruk P in bar geldt $P = \frac{p}{750}$.
Voor het verband tussen de temperatuur t in °C en de temperatuur T in kelvin geldt $T = t + 273{,}15$.
De eerder genoemde formule voor de dampdruk van aceton kan men herschrijven tot een formule van de vorm $\log(p) = a - \frac{1144}{t+b}$.
Hierin is p de dampdruk in mmHg, is t de temperatuur in °C en zijn a en b constanten.

c Bereken a en b. Rond de waarde van a af op twee decimalen en rond de waarde van b af op een geheel getal.

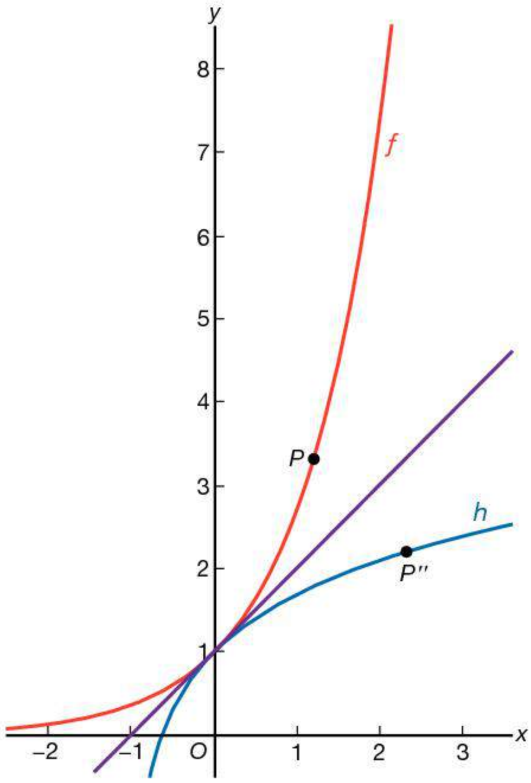
26 **2013-I**

De functie f is gegeven door $f(x) = e^x$.
Bij elk punt P van de grafiek van f wordt het punt P' bepaald dat het midden is van P en de loodrechte projectie van P op de y-as. Zie figuur 16.50. De punten P' vormen de grafiek van een functie g die is gegeven door $g(x) = a^x$ voor zekere waarde van a.

a Bereken exact deze waarde van a.



figuur 16.50



figuur 16.51

Bij elk punt P van de grafiek van f wordt het spiegelbeeld P'' in de lijn met vergelijking $y = x + 1$ bepaald. Zie figuur 16.51. De punten P'' vormen de grafiek van een functie h. Deze grafiek ontstaat uit die van f door een combinatie van een of meer translaties en een spiegeling in de lijn met vergelijking $y = x$.
Zo'n spiegeling van een grafiek van een functie in de lijn met vergelijking $y = x$ geeft de grafiek van de inverse functie.

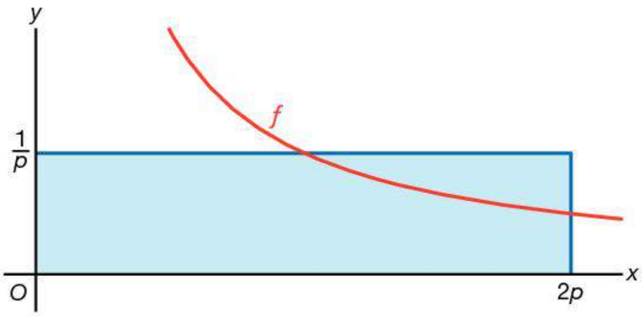
b Stel een formule voor h op.

16

27 **2014-I**

Voor $x > 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{x}$. In figuur 16.52 is voor $p > 0$ een rechthoek getekend die wordt begrensd door de lijnen met vergelijking $x = 2p$ en $y = \frac{1}{p}$, de x-as en de y-as.

Voor elke positieve waarde van p verdeelt de grafiek van f de rechthoek in twee stukken. Bewijs met behulp van integreren dat de oppervlakte van elk van deze stukken onafhankelijk is van de waarde van p.



figuur 16.52

28 **2013-II**

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$.

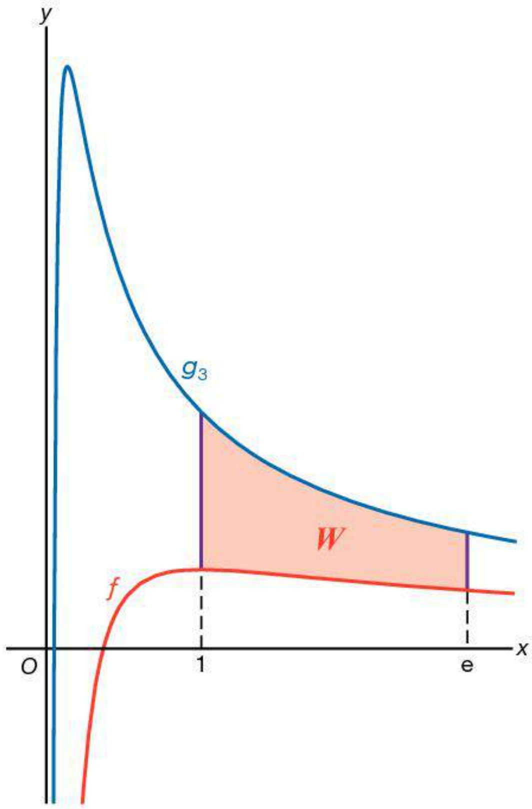
Voor elke waarde van c is de functie g_c gegeven door $g_c(x) = \frac{c + \ln(x)}{x}$.

De grafiek van f wordt ten opzichte van de x-as vermenigvuldigd met e, het grondtal van de natuurlijke logaritme. Vervolgens wordt de zo verkregen grafiek ten opzichte van de y-as vermenigvuldigd met $\frac{1}{e}$. Hierdoor ontstaat de grafiek van g_c voor een waarde van c.

a Bereken exact deze waarde van c.

In figuur 16.53 is de grafiek van g_3 getekend. Ook de grafiek van f is in de figuur getekend. W is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g_3 en de lijnen met vergelijking $x = 1$ en $x = e$.

b Bereken exact de oppervlakte van W.



figuur 16.53

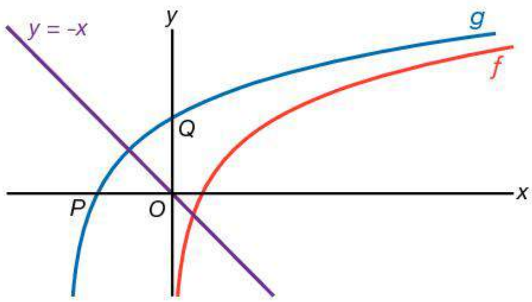
29 **2014-II**

Voor $x > 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2 \cdot \ln(x)$.

De grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, waarbij $a > 1$. De grafiek van g snijdt de x-as in punt P en de y-as in punt Q.

Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Zie figuur 16.54.

Bereken deze waarde van a. Rond je antwoord af op twee decimalen.



figuur 16.54

30 **2013-II**

Volgens sterrenkundigen zijn de meteorieten die op aarde terechtkomen tegelijk met ons zonnestelsel ontstaan. Meteorieten bestaan onder andere uit de stoffen rubidium-87 (Rb-87), strontium-87 (Sr-87) en strontium-86 (Sr-86).
Het radioactieve Rb-87 vervalt tot Sr-87. De hoeveelheid Sr-86 verandert niet. Om de leeftijd t, in jaren, van een meteoriet te bepalen gebruikt men onder andere de verhouding
$a(t) = \dfrac{\text{hoeveelheid Rb-87}}{\text{hoeveelheid Sr-86}}$ op tijdstip t. Deze verhouding verandert voortdurend vanaf het ontstaan van een meteoriet. Er geldt $a(t) = a(0) \cdot e^{-\lambda t}$. Hierin is λ de vervalconstante van Rb-87. Die is $1{,}42 \cdot 10^{-11}$ per jaar. De constante $a(0)$ is de verhouding tussen de hoeveelheden Rb-87 en Sr-86 op $t = 0$.

a Bereken op algebraïsche wijze in hoeveel tijd de waarde van a gehalveerd wordt. Geef je antwoord in miljarden jaren nauwkeurig.

De waarde $a(0)$ is onbekend en verschilt per meteoriet. Daarom kunnen we de leeftijd van een meteoriet niet bepalen op grond van de gemeten waarde $a(t)$ alleen. Leeftijdsbepaling is wel mogelijk door naast $a(t)$ ook gebruik te maken van een tweede verhouding $b(t) = \dfrac{\text{hoeveelheid Sr-87}}{\text{hoeveelheid Sr-86}}$ op tijdstip t.
Omdat Rb-87 vervalt tot Sr-87 en Sr-87 zelf niet vervalt, verandert de waarde van de *som* van $a(t)$ en $b(t)$ voor een bepaalde meteoriet niet in de loop der tijd. Dit betekent dat $a(t) + b(t) = a(0) + b(0)$ voor elke $t \geq 0$.
Uit $a(t) + b(t) = a(0) + b(0)$ en $a(t) = a(0) \cdot e^{-\lambda t}$ volgt
$b(t) + \left(1 - e^{\lambda t}\right)a(t) = b(0)$.

b Toon dit aan.

Van twee even oude meteorieten, M_1 en M_2, zijn de waarden $a(t)$ en $b(t)$ bepaald, waarbij t de leeftijd van deze meteorieten is. Zie de tabel.

meteoriet	$a(t)$	$b(t)$
M_1	0,60	0,739
M_2	0,20	0,713

Door gebruik te maken van
- $b(t) + \left(1 - e^{\lambda t}\right)a(t) = b(0)$, met $\lambda = 1{,}42 \cdot 10^{-11}$ per jaar
- de aanname dat $b(0)$ voor elke meteoriet hetzelfde is
- de gegevens uit de tabel

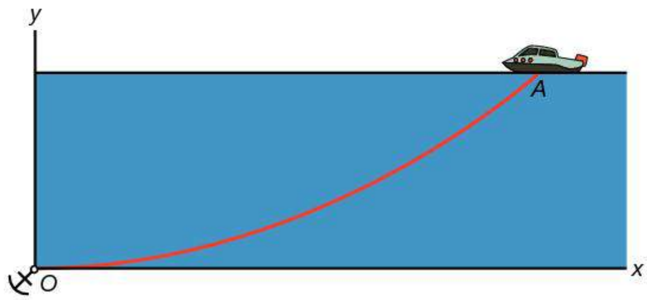
kan de leeftijd van de meteorieten (en volgens sterrenkundigen dus ook die van ons zonnestelsel) worden berekend.

c Bereken deze leeftijd. Rond je antwoord af op miljarden jaren.

16

31 **2014-II**

Een schip ligt op zee voor anker. Door stroming en wind trekt het schip aan de ankerketting. Hierdoor en door het eigen gewicht van de ankerketting neemt de ketting een vorm aan die bekend staat als een kettinglijn. In de figuur is deze situatie schematisch in een assenstelsel weergegeven. De x-as valt samen met de horizontale zeebodem, waarop het anker ligt.



figuur 16.55

De oorsprong O van het assenstelsel is gekozen in het punt waar de ankerketting aan het anker is bevestigd. Aan het schip zit de ankerketting vast in punt A. We gaan ervan uit dat de ankerketting daar direct het water in gaat. Het punt A bevindt zich 96 meter rechts van de y-as.

Een kettinglijn waarvan het laagste punt door O gaat, kan worden beschouwd als een deel van de grafiek van de functie f gegeven door $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot \left(e^{ax} + e^{-ax} - 2\right)$, met $a > 0$.

Voor de functie f geldt $1 + (f'(x))^2 = \left(\frac{1}{2}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{-ax}\right)^2$.

a Bewijs deze gelijkheid.

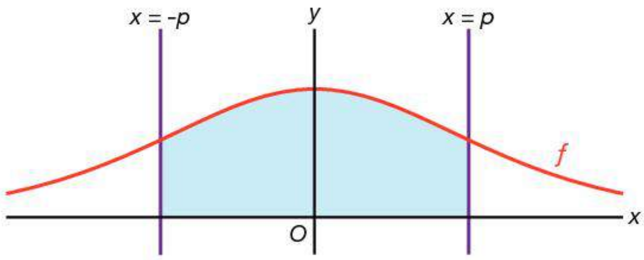
Voor de ankerketting in de figuur geldt $a = \frac{1}{140}$ en $0 \leq x \leq 96$. Hierin zijn x en $f(x)$ in meter. Door golven en wind kan een schip flinke bewegingen maken. Bij een korte ankerketting kan dan het anker losraken. Om dit te voorkomen geeft men bij het uitwerpen van een anker de ankerketting veel lengte. Hiervoor hanteert men in de scheepvaart de vuistregel dat de lengte van de ankerketting tussen anker en schip ten minste driemaal de waterdiepte moet zijn.

De lengte L van het deel van de grafiek van een functie f tussen de punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$ kan worden berekend met de formule $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

b Onderzoek of de ankerketting in figuur 16.55 aan deze vuistregel voldoet.

32 **2015-I**

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$. De grafiek van f is symmetrisch ten opzichte van de y-as. Gegeven is p, met $p > 0$. In de figuur is het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijnen met vergelijking $x = -p$ en $x = p$ blauw gemaakt. De oppervlakte van dit gebied noemen we $A(p)$.



figuur 16.56

Een primitieve F van f wordt gegeven door $F(x) = \frac{-1}{e^x+1}$.

Er geldt $A(p) = 1 - \frac{2}{e^p+1}$.

a Bewijs met behulp van de gegeven primitieve functie dat inderdaad geldt $A(p) = 1 - \frac{2}{e^p+1}$.

Als p onbegrensd toeneemt, nadert $A(p)$ tot een limietwaarde L.
Er is een waarde van p waarvoor $A(p)$ de helft is van L.

b Bereken exact deze waarde van p.

33 **2015-II**

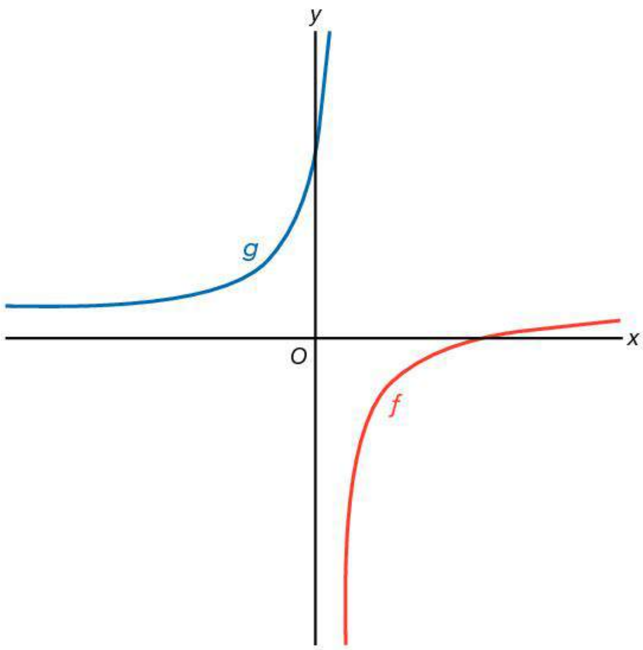
Voor $x > \frac{1}{2}$ is de functie f gegeven door

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right).$$

De functie g is de inverse van f.
In figuur 16.57 zijn de grafieken van f en g getekend.

Er geldt $g(x) = \frac{1+2e^x}{2-e^x}$.

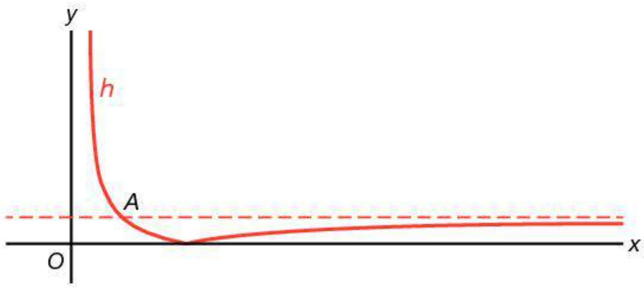
a Bewijs dit.



figuur 16.57

De functie h is gegeven door $h(x) = |f(x)|$. In figuur 16.58 is de grafiek van h getekend. De grafiek van h heeft een horizontale asymptoot. Deze is in de figuur gestippeld weergegeven. De grafiek van h snijdt de horizontale asymptoot in het punt A.

b Bereken exact de x-coördinaat van A.

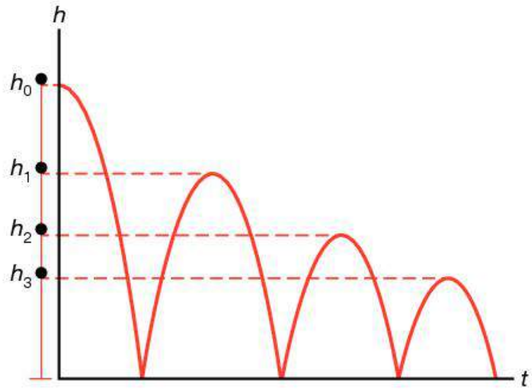


figuur 16.58

16

34 **2015-II**

Een bal wordt vanaf een bepaalde hoogte boven een vloer losgelaten en begint vervolgens te stuiteren. In deze opgave bekijken we een wiskundig model van deze situatie.
Op het moment van loslaten bevindt de onderkant van de bal zich h_0 meter boven de vloer. De maximale hoogte van de onderkant van de bal tussen twee keer stuiteren noemen we de *stuithoogte*. De stuithoogte na de eerste keer stuiteren noemen we h_1, die na de tweede keer stuiteren h_2, enzovoorts.
Aan de linkerkant van figuur 16.59 is de bal getekend op verschillende stuithoogtes. Rechts daarvan is de hoogte h van de stuiterende bal in meter uitgezet tegen de tijd t in seconden.
In deze opgave gaan we ervan uit dat de verhouding tussen twee opeenvolgende stuithoogtes constant is, dus $h_1 : h_0$ is gelijk aan $h_2 : h_1$, enzovoorts. Deze verhouding noemen we a.
Voor de stuithoogte na n keer stuiteren geldt dan $h_n = h_0 \cdot a^n$.
De waarde van a hangt af van het soort bal.

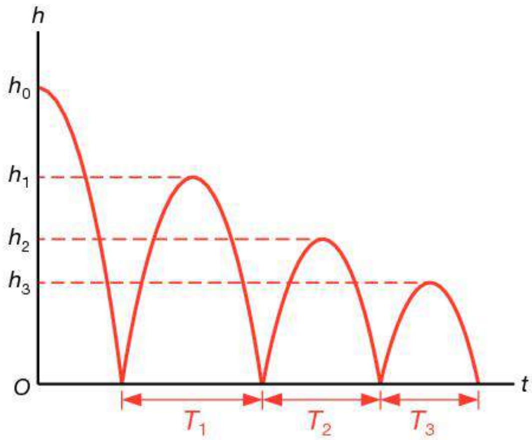


figuur 16.59

a Bereken de waarde van a voor een bal waarvan na 7 keer stuiteren de stuithoogte 5 keer zo klein is als de hoogte waarop de bal is losgelaten. Geef het antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

De hoogte van de onderkant van de bal tussen twee opeenvolgende keren stuiteren is een functie van de tijd. De grafiek van deze functie is een bergparabool. De tijd in seconden tussen de n-de en de n + 1-ste keer stuiteren noemen we de *stuittijd* T_n. In figuur 16.60 zijn drie stuittijden aangegeven. De stuittijd T_n kan worden uitgedrukt in de stuithoogte h_n. Er geldt

$$T_n = 2 \cdot \sqrt{\frac{h_n}{4{,}9}}.$$



figuur 16.60

Een bal wordt losgelaten vanaf hoogte h_0. De stuittijd T_1 is 1,11 seconden en de stuittijd T_4 is 0,68 seconden.

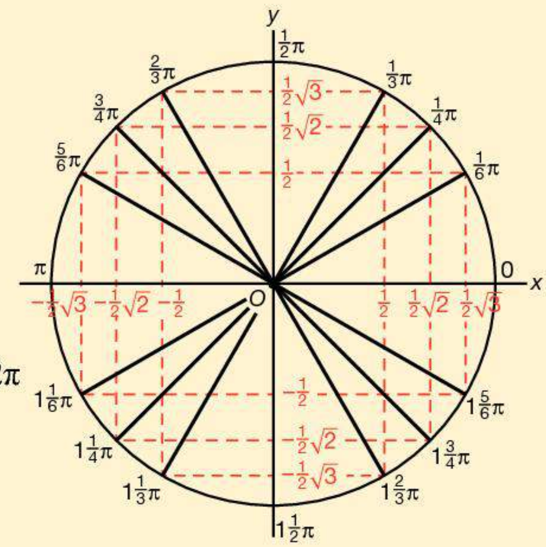
b Bereken h_0. Geef je antwoord in decimeter nauwkeurig.

16.4 Goniometrie

Goniometrische vergelijkingen

- Basistypen
  - $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -1, 0, 1$
    Oplossen met de eenheidscirkel.
  - $\sin(A) = C$ en $\cos(A) = C$ met $C = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

    Oplossen door uit de exacte -waarden-cirkel één oplossing B af te lezen. Daarna gebruik je
    $\sin(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
    $\cos(A) = C$ geeft $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$
  - $\sin(A) = \sin(B)$ en $\cos(A) = \cos(B)$
    Oplossen door te gebruiken
    $\sin(A) = \sin(B)$ geeft
    $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$
    $\cos(A) = \cos(B)$ geeft
    $A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$.
- Oplossen door eerst te herleiden tot een van de basistypen met behulp van een of meer van de volgende formules.



figuur 16.61 De exacte-waarden-cirkel.

$\sin(-A) = -\sin(A)$ $-\sin(A) = \sin(A + \pi)$ $\sin(A) = \cos\left(A - \frac{1}{2}\pi\right)$ $\sin^2(A) + \cos^2(A) = 1$	$\cos(-A) = \cos(A)$ $-\cos(A) = \cos(A + \pi)$ $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$ $\tan(A) = \dfrac{\sin(A)}{\cos(A)}$

Somformules en verschilformules

$\sin(t + u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$
$\sin(t - u) = \sin(t) \cdot \cos(u) - \cos(t) \cdot \sin(u)$
$\cos(t + u) = \cos(t) \cdot \cos(u) - \sin(t) \cdot \sin(u)$
$\cos(t - u) = \cos(t) \cdot \cos(u) + \sin(t) \cdot \sin(u)$

Verdubbelingsformules

$\sin(2A) = 2\sin(A) \cdot \cos(A)$
$\cos(2A) = \cos^2(A) - \sin^2(A)$
$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
$\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$

Uit $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$
volgt $\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2A)$.

Uit $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2(A)$
volgt $\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2A)$.

De somformules, de verschilformules en de verdubbelingsformules staan op de voorblad van het Centraal Examen, zie bladzijde 206.

De vergelijking $\sin(2x) \cdot \cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) + \cos(2x) \cdot \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$ los je op door de somformule $\sin(t + u) = \sin(t) \cdot \cos(u) + \cos(t) \cdot \sin(u)$ van rechts naar links te gebruiken. Je krijgt
$\sin\left(3x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

$3x + \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x + \frac{1}{3}\pi = \pi - \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$3x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = -\frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Lijn- en puntsymmetrie
De grafiek van een functie f is
- lijnsymmetrisch in de lijn $x = a$ als $f(a - p) = f(a + p)$ voor elke p
- puntsymmetrisch in (a, b) als $f(a - p) + f(a + p) = 2b$ voor elke p.

Afgeleiden en primitieven

$f(x) = \sin(ax + b)$ geeft $f'(x) = a\cos(ax + b)$
$g(x) = \cos(ax + b)$ geeft $g'(x) = -a\sin(ax + b)$
$h(x) = \tan(x)$ geeft $h'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en $h'(x) = 1 + \tan^2(x)$
$f(x) = \sin(ax + b)$ geeft $F(x) = -\dfrac{1}{a}\cos(ax + b) + c$
$g(x) = \cos(ax + b)$ geeft $G(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax + b) + c$

Er is een waarde van x met $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ waarvoor de functie $g(x) = 2x + 5\sin(2x)$ een maximum heeft. Als wordt gevraagd de exacte waarde van $f(x) = 10\cos(x)$ te berekenen voor deze waarde van x ga je als volgt te werk.
$g'(x) = 2 + 10\cos(2x)$
$g'(x) = 0$ geeft $2 + 10\cos(2x) = 0$

$\cos(2x) = -\frac{1}{5}$ — Gebruik $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

$2\cos^2(x) - 1 = -\frac{1}{5}$

$2\cos^2(x) = \frac{4}{5}$

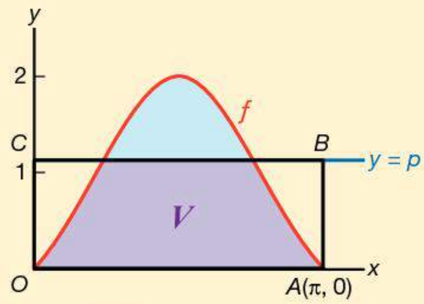
$\cos^2(x) = \frac{2}{5}$

$\cos(x) = \sqrt{\frac{2}{5}} \vee \cos(x) = -\sqrt{\frac{2}{5}}$

$0 < x < \frac{1}{2}\pi$ dus $\cos(x) = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{10}$

Dus de gevraagde waarde van $f(x)$ is $10 \cdot \frac{1}{5}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$.

In figuur 16.62 is de grafiek van $f(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$ met domein $[0, \pi]$ getekend. Ook is rechthoek $OABC$ getekend met $A(\pi, 0)$ en $C(0, p)$. De oppervlakte van $OABC$ is gelijk aan de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de x-as. Om de exacte waarde van p te berekenen ga je als volgt te werk.



figuur 16.62 $f(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$

$$O(V) = \int_0^{\pi} (\sin^2(x) + \sin(x))\mathrm{d}x \qquad \sin^2(x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x)$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \sin(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x) - \cos(x)\right]_0^{\pi}$$

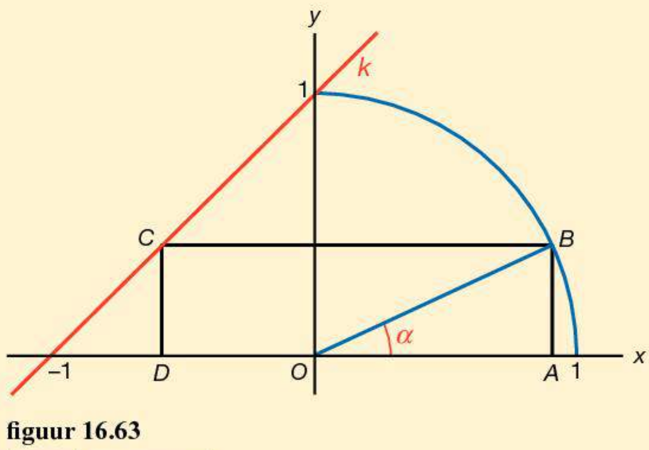
$$= \tfrac{1}{2}\pi - 0 + 1 - (0 - 0 - 1) = \tfrac{1}{2}\pi + 2$$

De oppervlakte van rechthoek $OABC$ is πp, dus er geldt $\pi p = \frac{1}{2}\pi + 2$ en dit geeft $p = \frac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}$.

Formules opstellen en gebruiken

Op het examen wordt soms gevraagd om een formule aan te tonen van een oppervlakte die afhankelijk is van een variabele hoek α. Vervolgens kunnen hiermee berekeningen worden gemaakt, bijvoorbeeld het berekenen voor welke α de oppervlakte maximaal is.

We lichten dit toe met de volgende situatie.
In figuur 16.63 is een kwart eenheidscirkel getekend en de lijn k: $y = x + 1$.
Van rechthoek $ABCD$ liggen de punten A en D op de x-as, het punt B ligt op de eenheidscirkel en het punt C ligt op k.
We bekijken de oppervlakte V van de rechthoek. Deze oppervlakte is afhankelijk van de hoek α, dat is de hoek die OB maakt met de x-as waarbij $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\pi$.
Voor de oppervlakte V geldt
$V = \frac{1}{2}\sin(2\alpha) - \sin^2(\alpha) + \sin(\alpha)$.



figuur 16.63

Om aan te tonen dat deze formule juist is ga je als volgt te werk.
Er geldt $OA = \cos(\alpha)$ en $AB = \sin(\alpha)$.
Omdat $AB = \sin(\alpha)$ is ook $CD = \sin(\alpha)$.
Omdat C op de lijn $y = x + 1$ ligt is $x_C = y_C - 1 = \sin(\alpha) - 1$.
Dus $AD = OA + OD = OA - x_C = \cos(\alpha) - (\sin(\alpha) - 1)$
$= \cos(\alpha) - \sin(\alpha) + 1$.
Zo krijg je $V = AD \cdot AB = (\cos(\alpha) - \sin(\alpha) + 1) \cdot \sin(\alpha)$
$= \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \sin^2(\alpha) + \sin(\alpha)$
$= \frac{1}{2}\sin(2\alpha) - \sin^2(\alpha) + \sin(\alpha)$.

16

Om algebraïsch te onderzoeken of V maximaal is voor $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ bereken je $V'\left(\frac{1}{4}\pi\right)$. Je krijgt

$$\begin{aligned} V'(\alpha) &= \cos(2\alpha) - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha) \\ &= \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) + \cos(\alpha). \end{aligned}$$

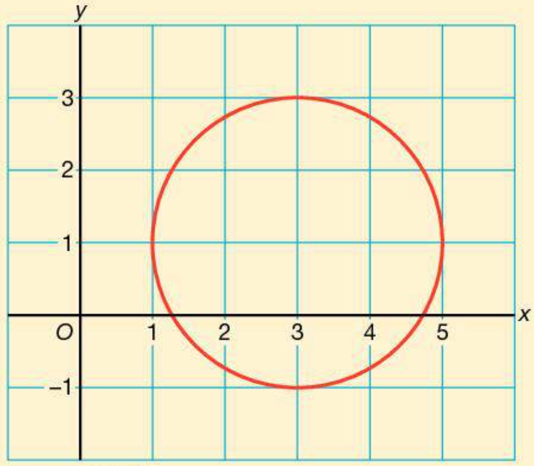
Dit geeft $V'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 0 - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \neq 0$.

Dus V is niet maximaal voor $\alpha = \frac{1}{4}\pi$.

Parametervoorstellingen en bewegingsvergelijkingen

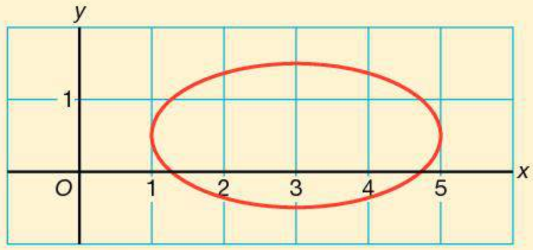
Een cirkel met middelpunt (a, b) en straal r is te noteren met de parametervoorstelling $\begin{cases} x = a + r\cos(t) \\ y = b + r\sin(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.

Zo hoort bij de parametervoorstelling $\begin{cases} x = 3 + 2\cos(t) \\ y = 1 + 2\sin(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$ de cirkel met middelpunt (3, 1) en straal 2. Zie figuur 16.64.



figuur 16.64

Vermenigvuldig je de cirkel ten opzichte van de x-as met $\frac{1}{2}$, dan krijg je de figuur hiernaast. De bijbehorende parametervoorstelling is $\begin{cases} x = 3 + 2\cos(t) \\ y = \frac{1}{2} + \sin(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq 2\pi$.



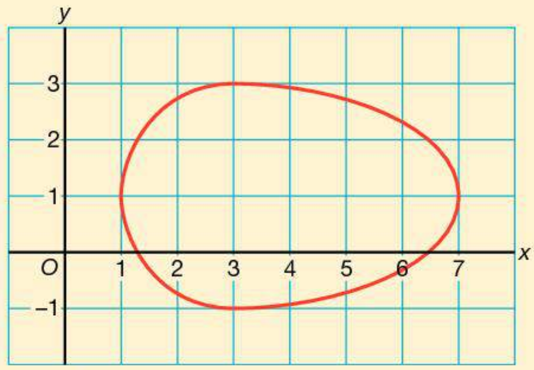
figuur 16.65

Bij de parametervoorstelling $\begin{cases} x = 3 + 2\cos(t) \\ y = 1 + 2\sin(t) \end{cases}$ met $-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ hoort de rechterhelft van de cirkel in figuur 16.64.

Vermenigvuldig je de rechterhelft van de cirkel in figuur 16.64 ten opzichte van de lijn $x = 3$ met 2 en laat je de linkerhelft ongemoeid, dan krijg je de figuur hiernaast.
Deze figuur kan worden beschreven met de volgende twee parametervoorstellingen:

$\begin{cases} x = 3 + 4\cos(t) \\ y = 1 + 2\sin(t) \end{cases}$ met $-\frac{1}{2}\pi \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ en

$\begin{cases} x = 3 + 2\cos(t) \\ y = 1 + 2\sin(t) \end{cases}$ met $\frac{1}{2}\pi \leq t \leq 1\frac{1}{2}\pi$.



figuur 16.66

Een parametervoorstelling met t de tijd is op te vatten als de beschrijving van de baan van een punt P.
Je hebt dan te maken met de bewegingsvergelijkingen van de baan.
Zo hoort de baan in de figuur hiernaast bij het punt P met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) \\ y(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) \end{cases}$
met t de tijd waarbij $0 \leq t \leq 2\pi$.
De baan snijdt de lijn $y = \frac{1}{2}x$ in de punten A en B. De bijbehorende t-waarden vind je door de vergelijking $\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2} \cdot 2\sin(t)$ op te lossen.

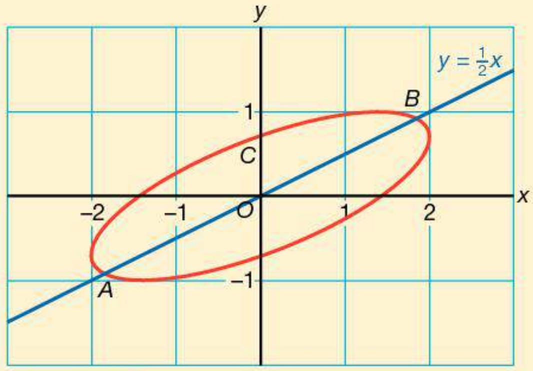
Dit geeft $\sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right) = \sin(t)$

$$t + \tfrac{1}{4}\pi = t + k \cdot 2\pi \vee t + \tfrac{1}{4}\pi = \pi - t + k \cdot 2\pi$$

$$\text{geen opl.} \qquad 2t = \tfrac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$t = \tfrac{3}{8}\pi + k \cdot \pi$$

t op $[0, 2\pi]$ geeft $t = \frac{3}{8}\pi \vee t = 1\frac{3}{8}\pi$



figuur 16.67

Op $t = 0$ is P in het punt $C\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$.
De helling van de baan in het punt C vind je als volgt.
$x(t) = 2\sin(t)$ geeft $x'(t) = 2\cos(t)$, dus $x'(0) = 2$.

$y(t) = \sin\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$ geeft $y'(t) = \cos\left(t + \frac{1}{4}\pi\right)$, dus $y'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

De helling is $\dfrac{y'(0)}{x'(0)} = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

De baansnelheid van P in C bereken je met de formule

$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

Dus $v(0) = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \sqrt{4\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

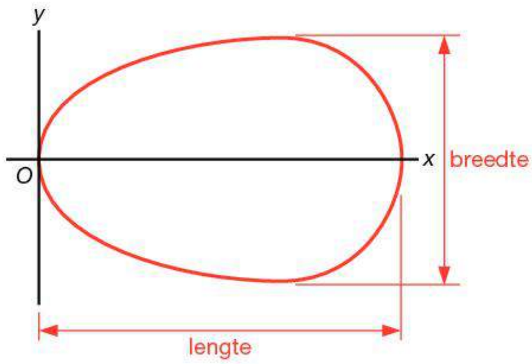
35 **2013-I**

Een model van een ei wordt gegeven door de twee parametervoorstellingen

$\begin{cases} x = 4 + 2\sin(t) \\ y = 2\cos(t) \end{cases}$ met $0 \leq t \leq \pi$, en

$\begin{cases} x = 4 + 4\sin(t) \\ y = 2\cos(t) \end{cases}$ met $\pi \leq t \leq 2\pi$.

Hierbij zijn x en y in cm.
Dit model voor de eivorm bestaat uit een halve cirkel gecombineerd met een halve cirkel die horizontaal is uitgerekt. Zie figuur 16.68.
Toon dit aan en bereken hiermee de lengte en de breedte van het ei.



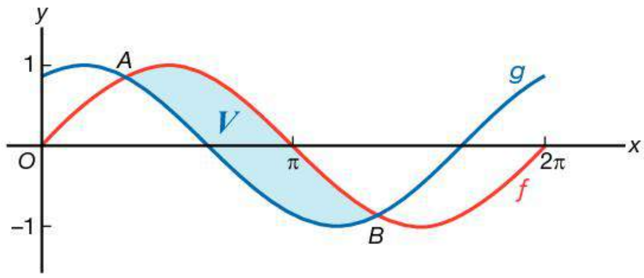
figuur 16.68

16

36 **2012-I**

De functies f en g zijn gegeven door $f(x) = \sin(x)$ en $g(x) = \sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$.
In figuur 16.69 zijn de grafieken van f en g getekend op het domein $[0, 2\pi]$.
De grafieken van f en g snijden elkaar op dit domein bij $x = \frac{1}{3}\pi$ in het punt A en bij $x = \frac{4}{3}\pi$ in het punt B. Zie figuur 16.69.
V is het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten door de grafieken van f en g.

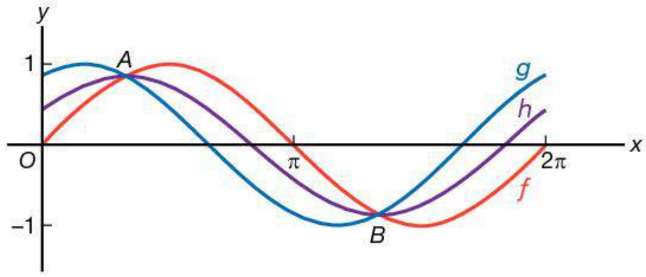
a Bereken met behulp van primitiveren de oppervlakte van V.



figuur 16.69

De functie h is gegeven door $h(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x))$. In figuur 16.70 zijn de grafieken van f, g en h getekend op het domein $[0, 2\pi]$.

b Bereken exacte waarden van a en b zo dat $\frac{1}{2} \cdot (f(x) + g(x))$ te herleiden is tot $a \cdot \sin(x + b)$.



figuur 16.70

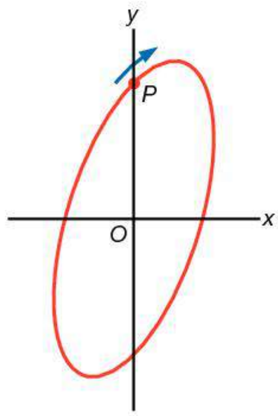
37 **2012-II**

Punt P doorloopt in het Oxy-vlak een ellipsvormige baan volgens de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\sin(t) \\ y(t) = \sin\left(t + \frac{1}{3}\pi\right) \end{cases}$

Hierin is t de tijd.
De baan van P is weergegeven in figuur 16.71.
Gedurende de beweging verandert de afstand van P tot de oorsprong.

a Bereken de maximale afstand van P tot de oorsprong. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

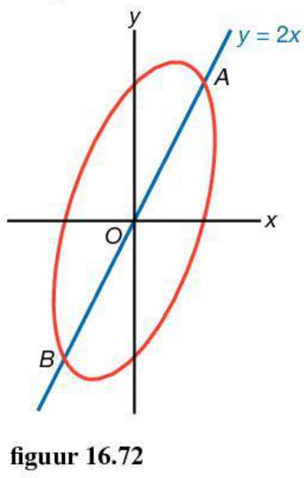
b Bereken exact de snelheid van P als $t = 0$.



figuur 16.71

De baan van P snijdt de lijn met vergelijking $y = 2x$ in de punten A en B.
Zie figuur 16.72.

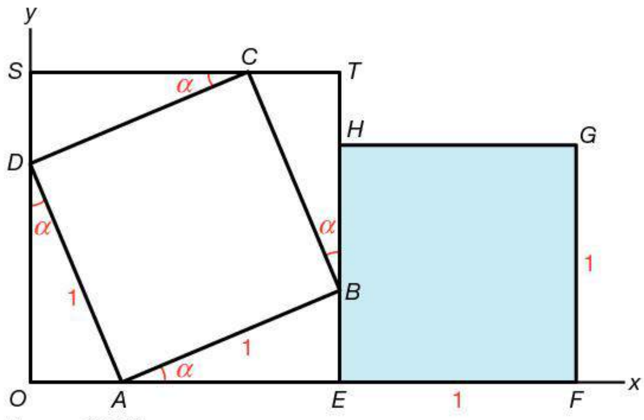
c Bereken exact de coördinaten van A en B.



figuur 16.72

38 **2013-I**

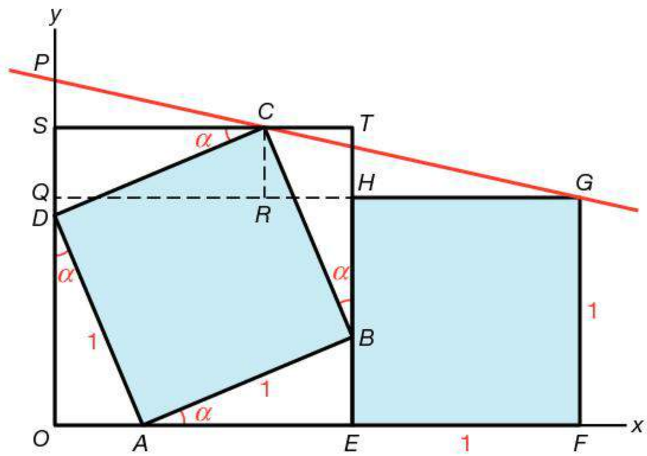
In figuur 16.73 zie je in een assenstelsel een vierkant *ABCD* met zijde 1.
Hoekpunt *A* ligt op de positieve *x*-as en hoekpunt *D* op de positieve *y*-as.
Vierkant *EFGH* heeft ook zijde 1. Dit vierkant ligt naast *ABCD* zo dat zijde *EF* op de *x*-as ligt en hoekpunt *B* van vierkant *ABCD* op zijde *EH* ligt.
Om vierkant *ABCD* is een derde vierkant *OETS* getekend met horizontale en verticale zijden.
Voor de hoek α, in rad, die zijde *AB* met de *x*-as maakt, geldt $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. In figuur 16.73 is aangegeven welke hoeken gelijk zijn aan α.
De coördinaten van *C* en *G* hangen als volgt van α af:
$C(\cos(\alpha), \sin(\alpha) + \cos(\alpha))$ en $G(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1, 1)$.



figuur 16.73

a Bereken exact de oppervlakte van vierkant *OETS* voor $\alpha = \frac{1}{6}\pi$. Schrijf je antwoord zonder haakjes.

De lijn door *G* en *C* snijdt de *y*-as in *P*. De loodrechte projectie van *G* op de *y*-as noemen we *Q* en de loodrechte projectie van *C* op de lijn *GQ* noemen we *R*. Zie figuur 16.74.



figuur 16.74

Er geldt $OP = 1 + \dfrac{(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) - 1)(\sin(\alpha) + \cos(\alpha) + 1)}{\sin(\alpha) + 1}$.

b Toon aan dat deze formule juist is.

De lengte van *OP* kan ook geschreven worden als
$OP = 1 + \dfrac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha) + 1}$.

c Toon dit op algebraïsche wijze aan.

De hoogte van punt *C* is maximaal als $\alpha = \frac{1}{4}\pi$. Maar de hoogte van punt *P* is maximaal voor een andere waarde van α tussen 0 en $\frac{1}{2}\pi$.

d Bereken met behulp van differentiëren bij welke waarde van α de hoogte van punt *P* maximaal is. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

16

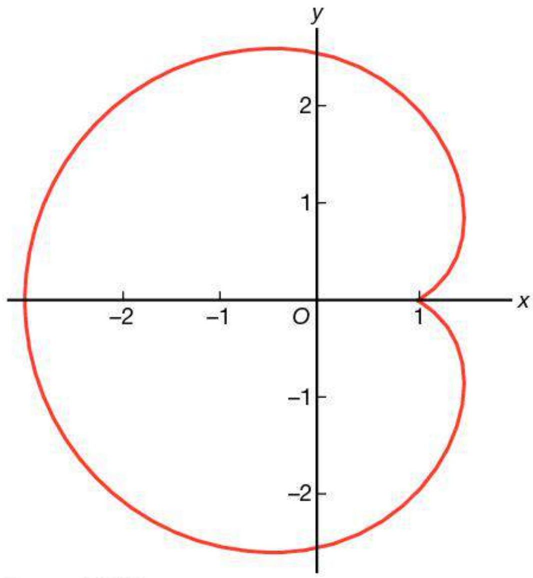
39 2013-II

Voor $0 \leq t \leq 2\pi$ wordt de beweging van een punt P beschreven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

In figuur 16.75 is de baan van P getekend. Voor $t = 0$ en $t = 2\pi$ bevindt P zich in $(1, 0)$.

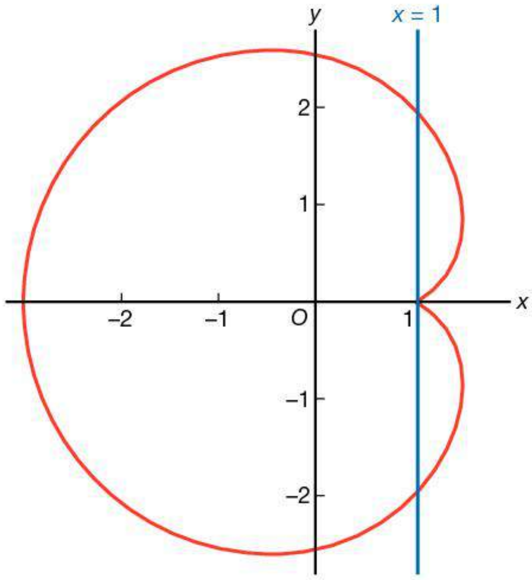
a Bereken exact de maximale snelheid van P.



figuur 16.75

De lijn met vergelijking $x = 1$ snijdt de baan van P behalve in het punt $(1, 0)$ ook in de punten $(1, a)$ en $(1, -a)$, met $a > 0$. Zie figuur 16.76.

b Bereken exact de waarde van a.



figuur 16.76

40 2014-I

Voor elke waarde van a, met $a \neq 0$, is de functie f_a gegeven door

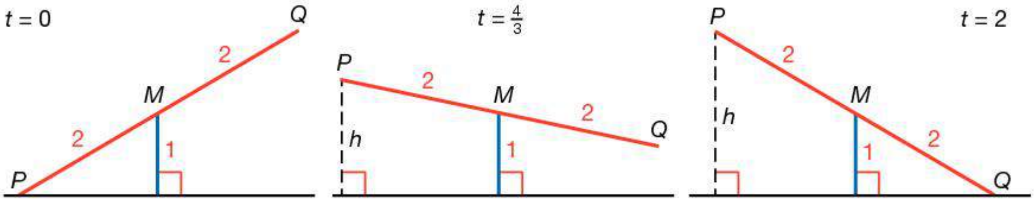
$$f_a(x) = \frac{\sin(ax)}{1 - 2\cos(ax)}.$$

a Bereken exact voor welke waarden van a de lijn met vergelijking $x = \pi$ een verticale asymptoot is van de grafiek van f_a.

b Bewijs dat de grafiek van f_2 puntsymmetrisch is in het punt $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$.

41 **2014-II**

We bekijken in deze opgave een wiskundig model voor de beweging van het uiteinde van een wip.
Lijnstuk PQ met midden M en lengte 4 draait om M. De hoogte van M is 1. Zie figuur 16.77. We kijken naar het verloop van de hoogte h van P. Op tijdstip $t = 0$ is de hoogte van P gelijk aan 0. Van $t = 0$ tot $t = 2$ beweegt P omhoog. In figuur 16.77 is het lijnstuk getekend op drie tijdstippen: op $t = 0$, op $t = \frac{4}{3}$ en op $t = 2$.



figuur 16.77

De hoogte van P tijdens de omhooggaande beweging wordt beschreven door het model

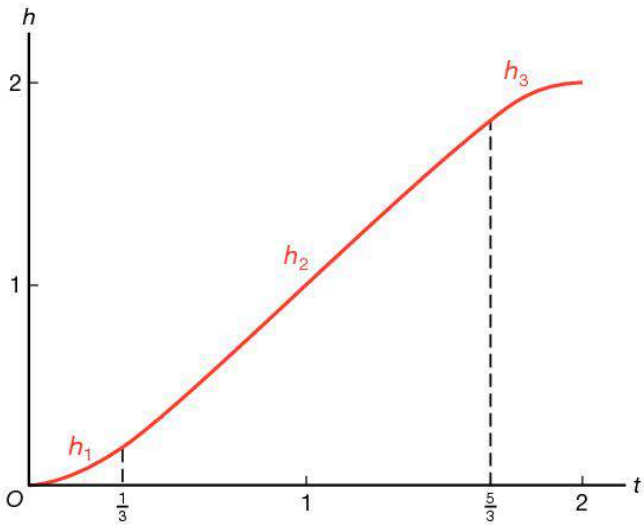
- fase 1: $h_1(t) = 1 + 2\sin\left(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}\right)$ voor $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$
- fase 2: $h_2(t) = 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5}\right)$ voor $\frac{1}{3} < t \leq \frac{5}{3}$
- fase 3: $h_3(t) = 1 + 2\sin\left(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30}\right)$ voor $\frac{5}{3} < t \leq 2$.

Hierin zijn h_1, h_2 en h_3 de hoogtes van P in de verschillende fasen. In figuur 16.78 is de grafiek van de hoogte van P in de fasen 1, 2 en 3 getekend.
De hoogte van P aan het eind van fase 2 is $h_2\left(\frac{5}{3}\right)$. Door $t = \frac{5}{3}$ in te vullen in de formule van h_3 kan worden bewezen dat de hoogte van P aan het begin van fase 3 gelijk is aan de hoogte van P aan het eind van fase 2.

a Bewijs dat deze hoogtes gelijk zijn.

De helling van de grafiek van h_2 aan het begin van fase 2 is $\frac{2\pi}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{15}\right)$.

b Bewijs dat de helling van de grafiek van h_1 aan het eind van fase 1 hieraan gelijk is.



figuur 16.78

Voor elke waarde van a, met $0 < a < \frac{2}{3}$, geldt

$$\frac{h_2(1-a) + h_2(1+a)}{2} = 1.$$

c Bewijs deze gelijkheid.

16

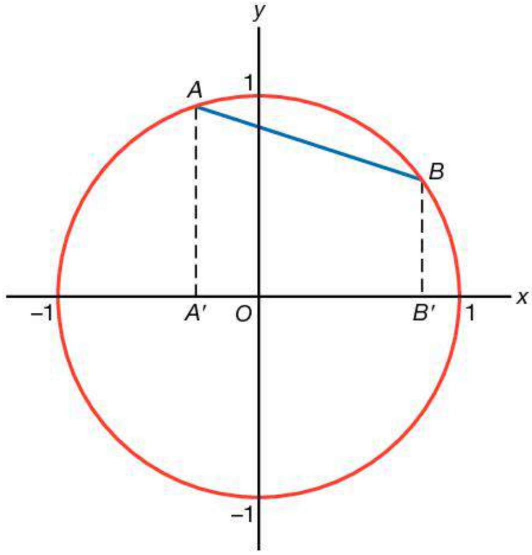
42 **2014-II**

Over de eenheidscirkel bewegen twee punten A en B. Beide punten bevinden zich op tijdstip $t = 0$ in het punt $(1, 0)$. Ze bewegen met constante snelheid, waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn respectievelijk

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}.$$

Voor $t \neq k \cdot \pi$, met k geheel, vallen de punten A en B niet samen en zijn ze de eindpunten van de koorde AB.
In figuur 16.79 is de situatie getekend voor $t = \frac{1}{5}\pi$.
Lijnstuk $A'B'$ is de loodrechte projectie van koorde AB op de x-as. De lengte van $A'B'$ verandert voortdurend tijdens de beweging.

a Bereken de maximale lengte van $A'B'$.
Rond je antwoord af op twee decimalen.



figuur 16.79

Tijdens de beweging verandert ook de richtingscoëfficiënt van koorde AB. Deze richtingscoëfficiënt noemen we a. Voor elk tijdstip t, waarbij $t \neq k \cdot \frac{1}{2}\pi$ met k geheel, geldt:

(1) $\quad a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Deze formule kan bewezen worden met behulp van de volgende goniometrische formules:

(2) $\quad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ (voor elke waarde van p en q)

(3) $\quad \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$ (voor elke waarde van p en q)

b Bewijs formule (1) met behulp van formules (2) en (3).

Lijn l is de lijn met vergelijking $y = -x$. Er zijn vier waarden van t, met $0 < t < 2\pi$, waarvoor koorde AB evenwijdig is met l.

c Bereken exact deze vier waarden.

43 2015-I

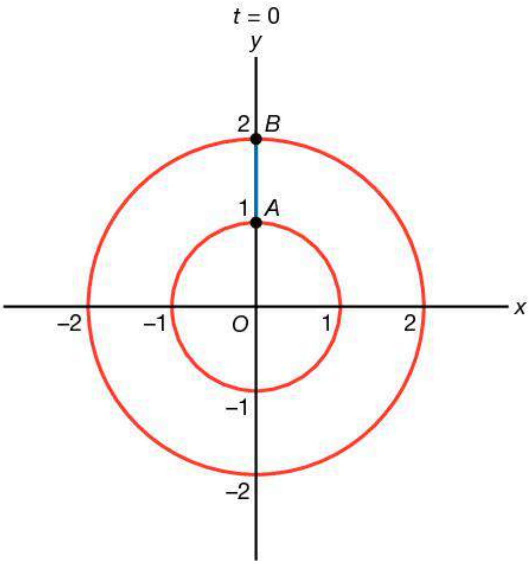
[▶ WERKBLAD] Over de cirkel met middelpunt (0, 0) en straal 1 beweegt een punt A met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$

met $0 \leq t \leq 2\pi$.

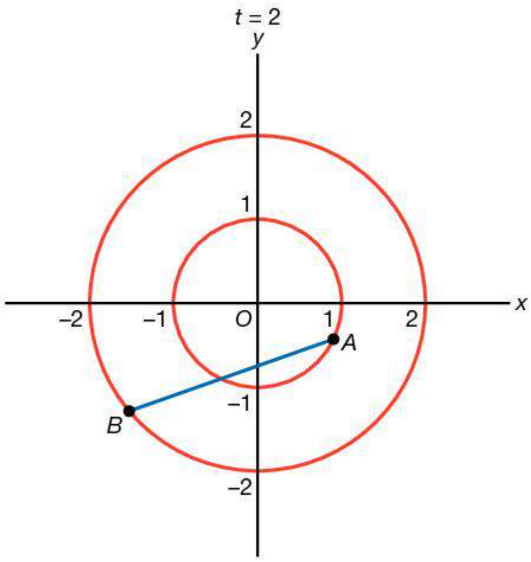
Over de cirkel met middelpunt (0, 0) en straal 2 beweegt een punt B met bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 2\sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(2t) \end{cases}$

met $0 \leq t \leq 2\pi$.

In de figuren 16.80 en 16.81 zijn de twee cirkels en het lijnstuk AB getekend voor de tijdstippen $t = 0$ en $t = 2$.



figuur 16.80



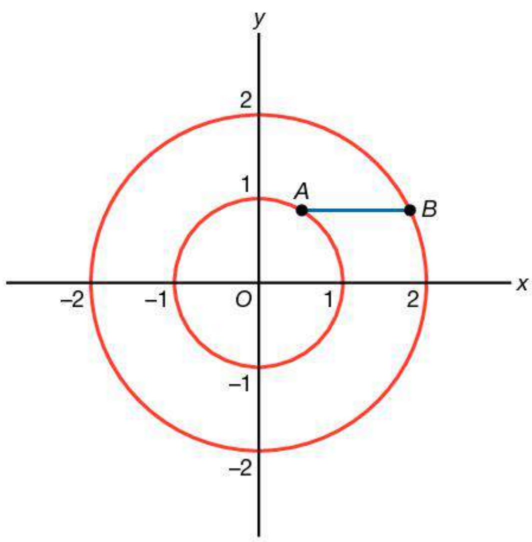
figuur 16.81

Op de tijdstippen waarop B zich op de x-as bevindt, bevindt A zich op de lijn met vergelijking $y = x$ of op de lijn met vergelijking $y = -x$.

a Bewijs dit.

In figuur 16.82 is het lijnstuk AB getekend op een tijdstip waarop het horizontaal is en boven de x-as ligt. Er zijn twee tijdstippen waarop het lijnstuk AB horizontaal is en *onder* de x-as ligt.

b Bereken voor één van deze tijdstippen de coördinaten van A, afgerond op één decimaal, en teken het bijbehorende lijnstuk AB in de figuur op het werkblad.

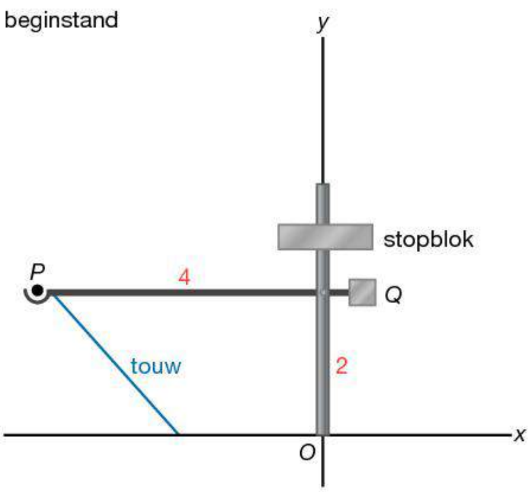


figuur 16.82

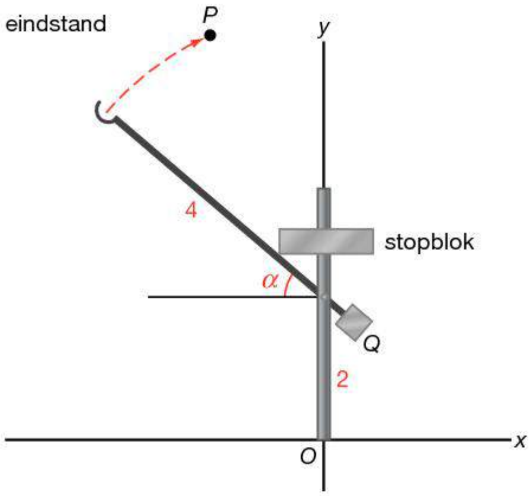
16

44 **2015-II**

In vroeger tijden probeerde men met een katapult kogels over vestingmuren te slingeren. In deze opgave bekijken we een katapult met een draaibare hefboom. Het linker deel van de hefboom is 4 meter lang. Op het einde daarvan ligt een kogel met middelpunt P. Aan het einde van het rechter deel van de hefboom zit een contragewicht Q. In het begin wordt de hefboom horizontaal gehouden door een touw tussen de hefboom en de grond. De hoogte van de hefboom is dan 2 meter.
In figuur 16.83 is deze beginstand getekend in een assenstelsel met oorsprong O op de grond. Punt P heeft dan coördinaten $(-4, 2)$.
Nadat het touw wordt doorgesneden, gaat de hefboom draaien in de richting van de wijzers van de klok, tot deze draaiing door een verstelbaar stopblok wordt gestopt en de kogel wegvliegt. De draaihoek in de eindstand wordt de *stophoek* α genoemd, met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ radialen. In figuur 16.84 is de eindstand getekend.



figuur 16.83



figuur 16.84

a Druk de coördinaten van P uit in de stophoek α op het moment dat de eindstand wordt bereikt.

Als de hefboom bij stophoek α tot stilstand komt, verlaat de kogel de hefboom en vliegt vervolgens door de lucht. De baan die P dan beschrijft is bij benadering gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 20t \cdot \sin(\alpha) \cdot \sqrt{\sin(\alpha)} - 4\cos(\alpha) \\ y(t) = -5t^2 + 2 + 20t \cdot \cos(\alpha) \cdot \sqrt{\sin(\alpha)} + 4\sin(\alpha) \end{cases}$$

Hierin is t de tijd in seconden vanaf het moment dat de kogel de hefboom verlaat. Verder zijn $x(t)$ en $y(t)$ in meter en is α in radialen.
Voor y_{top}, de y-coördinaat van het hoogste punt van de baan van P, geldt $y_{top} = 2 + 24\sin(\alpha) - 20\sin^3(\alpha)$.

b Bewijs dat de formule voor y_{top} volgt uit de bewegingsvergelijkingen.

Uit de formule voor y_{top} kan de waarde van de stophoek α worden berekend waarvoor de kogel de grootst mogelijke hoogte bereikt. In dit optimale geval zijn de bewegingsvergelijkingen

voor P bij benadering gelijk aan $\begin{cases} x(t) = 10{,}1t - 3{,}1 \\ y(t) = -5t^2 + 12{,}3t + 4{,}5 \end{cases}$

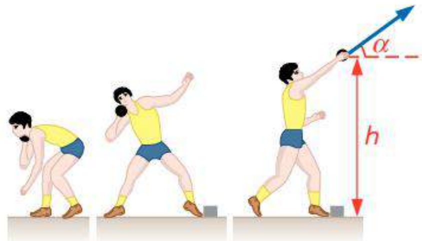
c Toon met een berekening aan dat in dit geval inderdaad bij benadering geldt $y(t) = -5t^2 + 12{,}3t + 4{,}5$.

De stophoek is zo ingesteld dat de kogel zo hoog mogelijk komt. Als de katapult, gemeten vanaf O, 24 meter van een 6 meter hoge vestingmuur staat, komt de kogel niet over de muur.

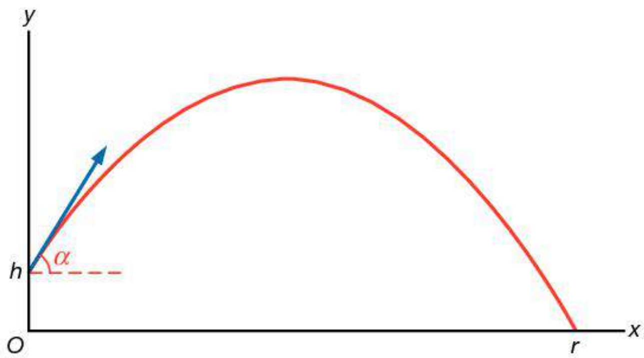
d Bereken de afstand waarover de katapult minstens in de richting van de muur moet worden verschoven zodat de kogel wel over de muur komt. Geef het antwoord in gehele meter.

45 **2014-I**

Een kogelstoter stoot een kogel weg onder een hoek α in radialen met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. De hoogte in meter waarop de kogelstoter de kogel loslaat is h. Zie figuur 16.85.
Bij deze situatie kiezen we een assenstelsel waarbij de plaats waar de kogel wordt losgelaten zich op hoogte h op de verticale as bevindt. De kogel komt op afstand r in meter van de oorsprong op de grond. Zie figuur 16.86.



figuur 16.85



figuur 16.86

In deze opgave gaan we ervan uit dat de kogelstoter de kogel altijd met dezelfde snelheid wegstoot.
De horizontale afstand r die de kogel overbrugt, hangt af van de hoek α waaronder deze wordt weggestoten.
In het algemeen geldt voor elke waarde van α de formule $r = \cos(\alpha)\left(\sin(\alpha) + \sqrt{\sin^2(\alpha) + 0{,}1h}\right)$. De ideale stoothoek is de hoek α waarbij r zo groot mogelijk is.
We bekijken de situatie waarbij de kogelstoter de kogel loslaat op een hoogte van 1,85 m.

a Bereken voor deze situatie de ideale stoothoek.

Bekijk de denkbeeldige situatie waarin $h = 0$.

b Bereken exact de ideale stoothoek voor deze denkbeeldige situatie.

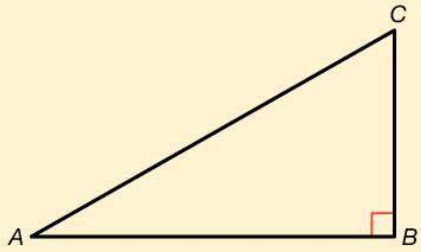
16.5 Meetkunde

Goniometrie, Pythagoras en oppervlakte

In rechthoekige driehoeken zijn hoeken en zijden te berekenen met goniometrie en de stelling van Pythagoras.

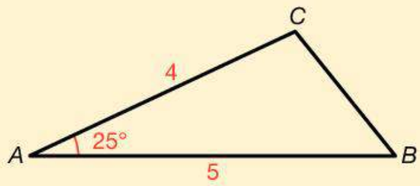
$\sin(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}$ $\qquad \tan(\angle A) = \dfrac{BC}{AB}$

$\cos(\angle A) = \dfrac{AB}{AC}$ $\qquad AB^2 + BC^2 = AC^2$



figuur 16.87

Om de oppervlakte van $\triangle ABC$ in figuur 16.88 te berekenen kun je de formule $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$ gebruiken.
Je krijgt $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin(25°) \approx 4{,}23$.



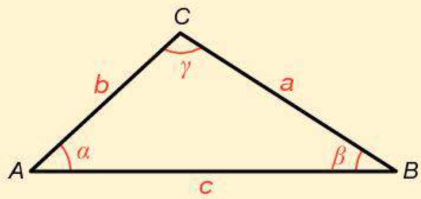
figuur 16.88

De sinusregel en de cosinusregel

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel.

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Om de sinusregel te kunnen gebruiken moet in elk geval een zijde met een overstaande hoek zijn gegeven.
In het geval één hoek en twee zijden zijn gegeven, kan het zijn dat er twee driehoeken mogelijk zijn.



figuur 16.89

In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

De cosinusregel gebruik je

- voor het berekenen van een zijde van een driehoek als twee zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven
- voor het berekenen van een hoek van een driehoek als de drie zijden zijn gegeven.

De hoek tussen twee lijnen
De hoek tussen twee lijnen waarvan de vergelijkingen zijn gegeven bereken je met behulp van richtingshoeken.

Voor de richtingshoek α van de lijn k geldt $\tan(\alpha) = \text{rc}_k$ en $-90° < \alpha \leq 90°$.
Voor de hoek φ tussen twee lijnen met richtingshoeken α en β, waarbij $\alpha > \beta$, geldt
$\varphi = \alpha - \beta$ als $\alpha - \beta \leq 90°$
$\varphi = 180° - (\alpha - \beta)$ als $\alpha - \beta > 90°$.
Als voor de lijnen k en l geldt $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, dan staan de lijnen loodrecht op elkaar.

Zijn van de lijnen de richtingsvectoren bekend, dan gebruik je bij het berekenen van de hoek tussen de lijnen k en l de formule

$$\cos(\angle(k, l)) = \left|\cos(\angle(\vec{r}_k, \vec{r}_l))\right| = \frac{|\vec{r}_k \cdot \vec{r}_l|}{|\vec{r}_k| \cdot |\vec{r}_l|}.$$

Afstanden bij punten en lijnen
Voor het berekenen van de afstand tussen de punten $A(x_A, y_A)$ en $B(x_B, y_B)$ gebruik je $d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Voor het berekenen van de afstand tussen het punt $P(x_P, y_p)$ en de lijn k: $ax + by = c$ gebruik je de afstandsformule

$$d(P, k) = \frac{|ax_P + by_P - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Cirkelvergelijkingen
De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r is $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.
Door de haakjes weg te werken is de cirkelvergelijking te schrijven in de vorm $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Is een cirkel gegeven in deze laatste vorm, dan is deze met kwadraatafsplitsen te schrijven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ en hieruit zijn dan het middelpunt en de straal af te lezen.

Zo krijg je bij $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 54\frac{3}{4} = 0$

$$x^2 + 10x + y^2 - 12y + 54\tfrac{3}{4} = 0$$

$$(x + 5)^2 - 25 + (y - 6)^2 - 36 + 54\tfrac{3}{4} = 0$$

$$(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 6\tfrac{1}{4}$$

Dus de straal is $\sqrt{6\frac{1}{4}} = 2\frac{1}{2}$ en het middelpunt is $(-5, 6)$.

16

Cirkels en raaklijnen

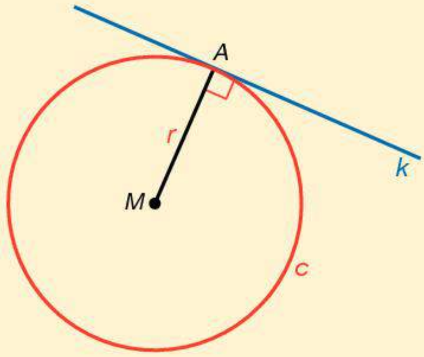
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt. Dus in figuur 16.90 staat de lijn door M en A loodrecht op k. Ook is $d(M, A) = r$, waarbij r de straal van de cirkel is.
We onderscheiden vier raaklijnproblemen.

1 Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
- een cirkel
- een punt op de cirkel waar k de cirkel raakt.

2 Stel een vergelijking op van de cirkel c als gegeven is
- het middelpunt van c
- een lijn waaraan c raakt.

3 Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
- een cirkel waaraan k raakt
- de richting van k.

4 Stel een vergelijking op van de lijn k als gegeven is
- een cirkel waaraan k raakt
- een punt buiten de cirkel op k.



figuur 16.90 De lijn k raakt de cirkel c in het punt A.

16

Bij de laatste drie raaklijnproblemen kun je de afstandsformule gebruiken.
Bij het eerste raaklijnprobleem gebruik je het volgende werkschema.

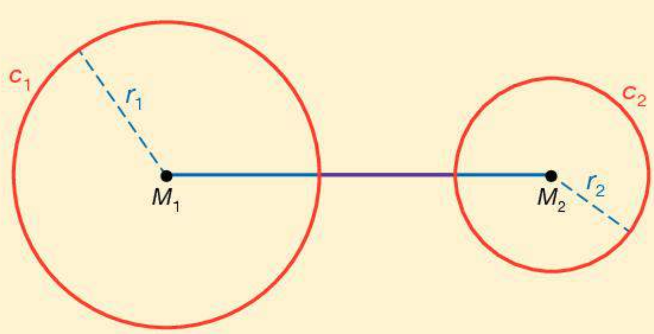
Werkschema: het opstellen van een vergelijking van een raaklijn k aan een cirkel c met middelpunt M in een gegeven punt A op c.

1 Bereken de richtingscoëfficiënt rc_l van de lijn l door M en A.
2 Gebruik $k \perp l$, dus $\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1$, om de richtingscoëfficiënt rc_k van k te berekenen.
3 Gebruik rc_k en de coördinaten van A om een vergelijking van k op te stellen.

Afstanden bij cirkels

Voor de afstand van een punt A tot een cirkel c met middelpunt M en straal r geldt
- $d(A, c) = r - d(M, A)$ als A binnen c ligt
- $d(A, c) = d(M, A) - r$ als A buiten c ligt.

Voor de afstand tussen cirkel c_1 met middelpunt M_1 en straal r_1 en cirkel c_2 met middelpunt M_2 en straal r_2 in de figuur hiernaast geldt $d(c_1, c_2) = d(M_1, M_2) - r_1 - r_2$.



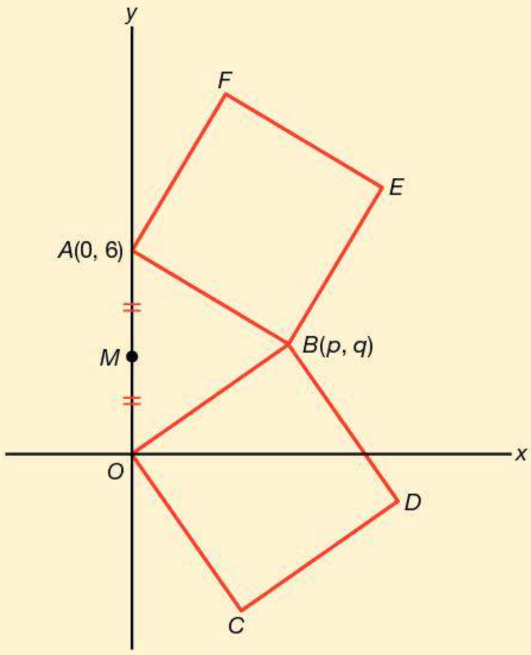
figuur 16.91

Rotaties over 90°

Draai je de vector $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rechtsom over 90°, dan krijg je de vector $\vec{a}_R = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$.

Bij linksom draaien van a over 90° krijg je de vector $\vec{a}_L = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

Zie de figuur hiernaast met driehoek OAB waarbij $A(0, 6)$ en $B(p, q)$. Het punt M is het midden van OA. Tegen de zijden OB en AB liggen de vierkanten $OCDB$ en $ABEF$. Je kunt bewijzen dat de lijn MB loodrecht staat op de lijn DE. Dat gaat als volgt.



figuur 16.92

$\overrightarrow{MB} = \vec{b} - \vec{m} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q-3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}_R$

Omdat $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ is $\overrightarrow{OB}_R = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$, dus

$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ q-p \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}_R$

Omdat $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ 6-q \end{pmatrix}$ is

$\overrightarrow{BA}_R = \begin{pmatrix} 6-q \\ p \end{pmatrix}$, dus $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6-q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+p-q \\ p+q \end{pmatrix}$.

Dus $\overrightarrow{DE} = \vec{e} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 6+p-q \\ p+q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p+q \\ q-p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2q \\ 2p \end{pmatrix}$.

Nu is $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} p \\ q-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-2q \\ 2p \end{pmatrix} = 6p - 2pq + 2pq - 6p = 0$.

Dus de lijn MB staat loodrecht op de lijn DE.

Bewegingsvergelijkingen

Voor de baan van een punt P die gegeven is door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ met t de tijd geldt

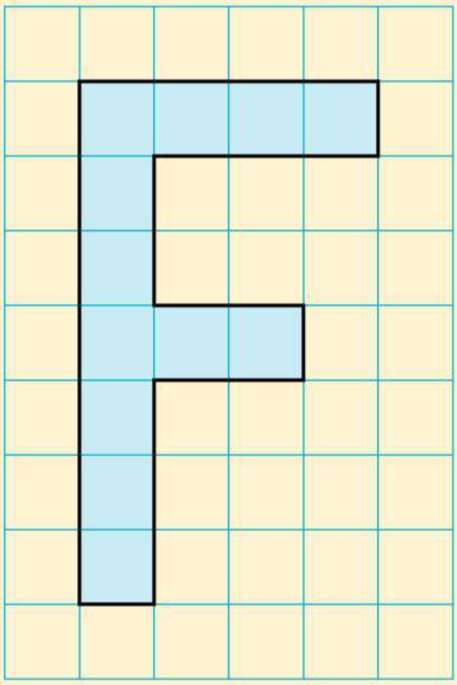
- de plaatsvector van P is $\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
- de snelheidsvector van P is $\vec{v}\,(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$
- de versnellingsvector van P is $\vec{a}\,(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$.

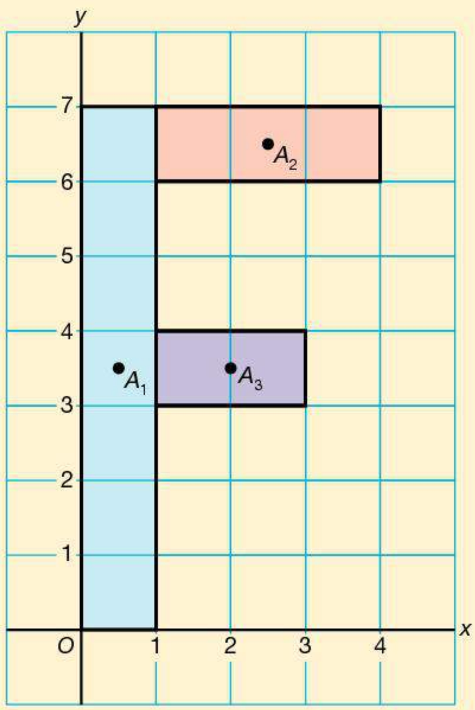
De baansnelheid is de lengte van de snelheidsvector, dus de baansnelheid is $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

De baanversnelling bereken je met de formule $a_b(t) = \dfrac{\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)|}$.

Zwaartepunten en vectoren
Voor het zwaartepunt Z van de massa's $m_1, m_2, ..., m_n$ in de punten $A_1, A_2, ..., A_n$ geldt $\vec{z} = \dfrac{1}{M}(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + ... + m_n\vec{a}_n)$ met $M = m_1 + m_2 + ... + m_n$.

Om het zwaartepunt van de massieve homogene vorm in figuur 16.93 te vinden, deel je de figuur op in een aantal rechthoeken en breng je een assenstelsel aan. Zie figuur 16.94.


figuur 16.93



figuur 16.94

$A_1\left(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$ en $m_1 = 7$

$A_2\left(2\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right)$ en $m_2 = 3$

$A_3\left(2, 3\frac{1}{2}\right)$ en $m_3 = 2$

$M = 7 + 3 + 2 = 12$

$$\vec{z} = \tfrac{1}{12}\left(7 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 6\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

$$= \tfrac{1}{12}\left(\begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 24\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ 19\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$$

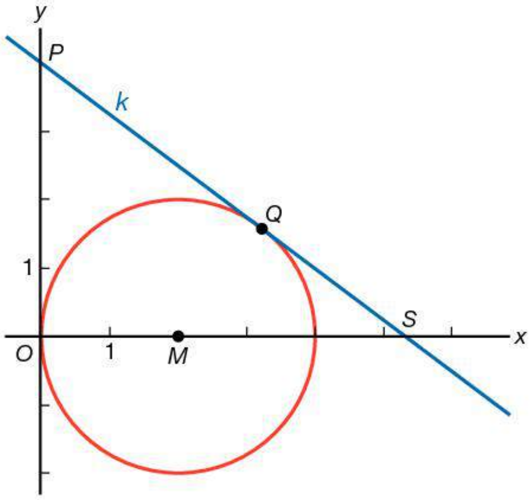
$$= \tfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 15 \\ 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{4} \\ 4\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dus $Z\left(1\frac{1}{4}, 4\frac{1}{4}\right)$.

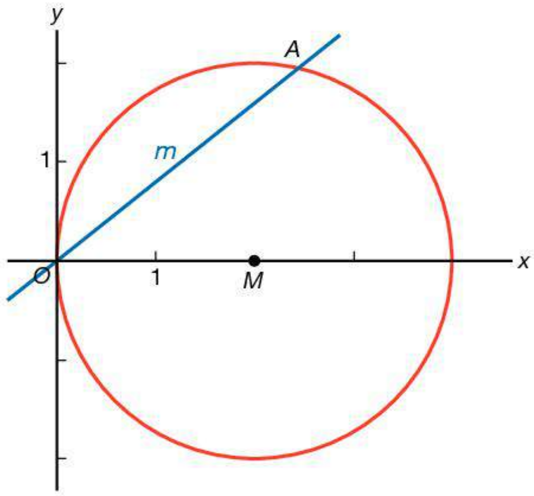
46 **2012-I**

Gegeven is de cirkel met middelpunt $M(2, 0)$ en straal 2. De niet-verticale lijn k gaat door het punt $P(0, 4)$, raakt de cirkel in het punt Q en snijdt de positieve x-as in het punt S. Zie figuur 16.95.

a Bereken exact de x-coördinaat van S.



figuur 16.95



figuur 16.96

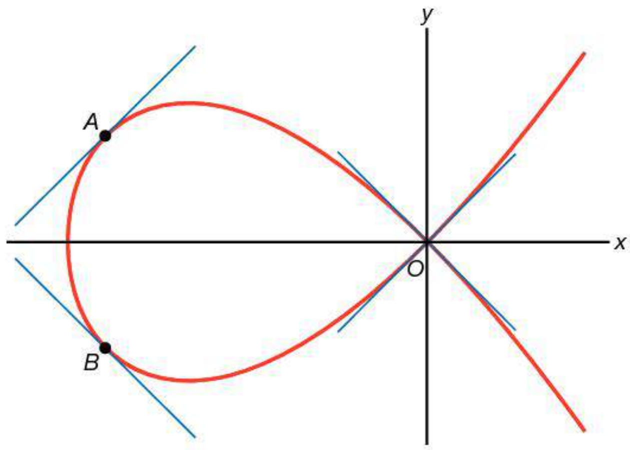
De lijn m met vergelijking $y = px$ met $p > 0$ snijdt de cirkel behalve in O in een punt A, zodanig dat $OA = 3$. Zie figuur 16.96.

b Bereken exact de waarde van p.

47 **2012-I**

Een punt beweegt in het Oxy-vlak volgens de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t(t^2 - 1) \end{cases}$

Hierin is t de tijd.
De baan van het punt heeft de vorm van een lus.
Het punt bevindt zich op de tijdstippen $t = -1$ en $t = 1$ in de oorsprong O.
In O heeft de baan van het punt twee raaklijnen.
Het bewegende punt passeert achtereenvolgens twee punten A en B waar de raaklijn aan de baan evenwijdig is met één van de raaklijnen in O. Zie figuur 16.97.
De benodigde tijd om van O naar A te bewegen, de benodigde tijd om van A naar B te bewegen en de benodigde tijd om van B naar O te bewegen, zijn alle drie even lang.
Toon dit aan.

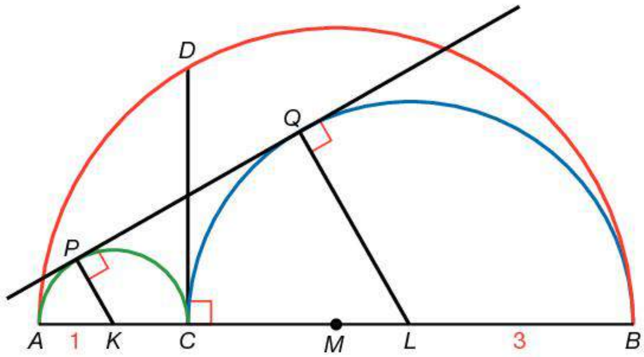


figuur 16.97

16

48 **2012-II**

[▶ WERKBLAD] Gegeven is een halve cirkel met middellijn AB en straal 4. Het middelpunt van deze cirkel is M. Op lijnstuk AB ligt het punt C zo dat $AC = 2$.
AC en CB zijn de middellijnen van twee andere halve cirkels met stralen 1 en 3. De middelpunten van deze twee halve cirkels zijn respectievelijk K en L. Alle halve cirkels liggen aan dezelfde kant van AB. De lijn door C loodrecht op AB snijdt de grootste halve cirkel in punt D.

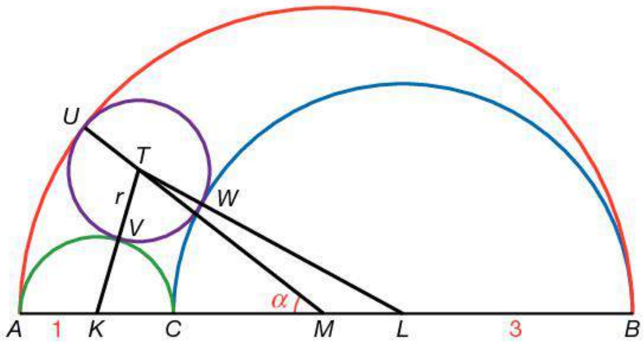


figuur 16.98

Lijn PQ is de gemeenschappelijke raaklijn aan de twee binnenste halve cirkels, waarbij P en Q de raakpunten zijn. PQ staat dus loodrecht op KP en op LQ. Zie figuur 16.98.

a Bewijs dat CD en PQ even lang zijn. Je kunt hierbij gebruik maken van de figuren op het werkblad.

Tussen de drie halve cirkels past precies één cirkel die raakt aan elk van de drie gegeven halve cirkels. Deze cirkel heeft middelpunt T en straal r. De raakpunten van deze cirkel met de drie halve cirkels zijn U, V en W. Zie figuur 16.99. Deze figuur staat ook op het werkblad.
$\angle TMK$ noemen we α.
Gebruik van de cosinusregel in driehoek MKT geeft $\cos(\alpha) = \dfrac{12 - 5r}{12 - 3r}$.



figuur 16.99

b Toon aan dat inderdaad geldt $\cos(\alpha) = \dfrac{12 - 5r}{12 - 3r}$.

Gebruik van de cosinusregel in driehoek MLT geeft bovendien $\cos(\alpha) = \dfrac{7r - 4}{4 - r}$.
Met behulp van de twee hierboven gegeven uitdrukkingen voor $\cos(\alpha)$ kan de waarde van r berekend worden.

c Bereken exact de waarde van r.

49 **2012-II**

Gegeven zijn

de lijn m met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

de lijn n met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

en de cirkel c met vergelijking $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

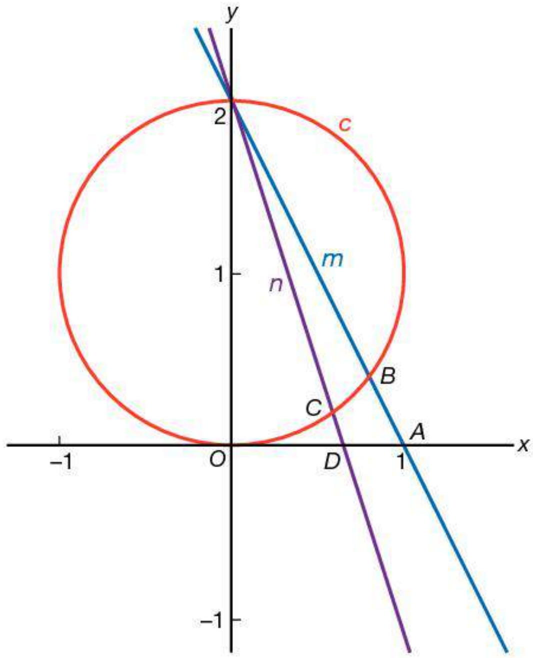
a Bereken de hoek tussen m en n. Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.

Lijn m snijdt de x-as in A en lijn m snijdt cirkel c in $(0, 2)$ en in B.
Lijn n snijdt de x-as in D en lijn n snijdt cirkel c in $(0, 2)$ en in C. Zie figuur 16.100.
Voor het punt B geldt $B\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

b Toon aan dat het punt B inderdaad de coördinaten $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ heeft.

Voor de punten A, C en D geldt $A(1, 0)$, $C\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ en $D\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

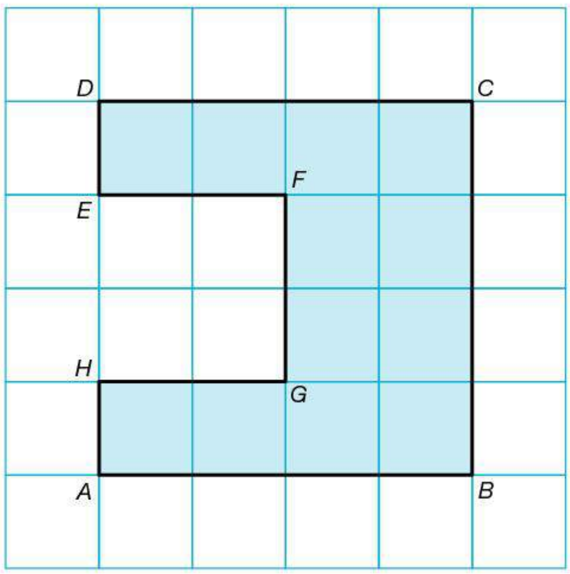
c Toon aan dat de punten A, B, C en D op één cirkel liggen.



figuur 16.100

50 **2013-I**

[▶ WERKBLAD] Gegeven is een veelhoek $ABCDEFGH$. Deze veelhoek is ontstaan door uit vierkant $ABCD$ met zijde 4, het vierkant $HGFE$ met zijde 2 weg te laten. Hierbij liggen E en H beide op AD met $AH = DE$. Zie figuur 16.101.
Om het zwaartepunt van deze veelhoek te vinden, kan de veelhoek bijvoorbeeld worden verdeeld in drie rechthoeken die vervolgens worden opgevat als drie puntmassa's. Het zwaartepunt van de drie puntmassa's valt dan samen met het zwaartepunt van de veelhoek.
Teken in de figuur op het werkblad met behulp van vectoren de plaats van het zwaartepunt van de veelhoek. Licht je werkwijze toe.



figuur 16.101

16

51 **2013-II**

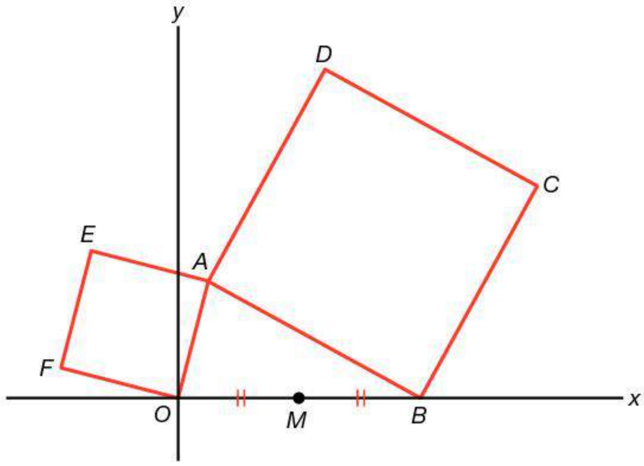
Voor positieve waarden van p en q is gegeven de driehoek OAB met $O(0, 0)$, $A(p, q)$ en $B(2, 0)$. Tegen de zijden OA en AB liggen de vierkanten $OAEF$ en $ABCD$. Deze vierkanten liggen buiten driehoek OAB. Het midden van lijnstuk OB is punt M. In de figuur is een mogelijke situatie weergegeven.

Er geldt $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} p+q \\ 2-p+q \end{pmatrix}$.

a Toon dit aan.

Verder geldt $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} p-q \\ p+q \end{pmatrix}$.

b Toon aan dat lijn MA loodrecht staat op lijn ED.



figuur 16.102

16

52 **2014-I**

Een lijn met vergelijking $ax + y = b$, met $a > 0$, wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y = x$. In figuur 16.103 zijn voor zekere waarden van a en b de lijn en zijn spiegelbeeld getekend. De hoek tussen de twee lijnen is α.

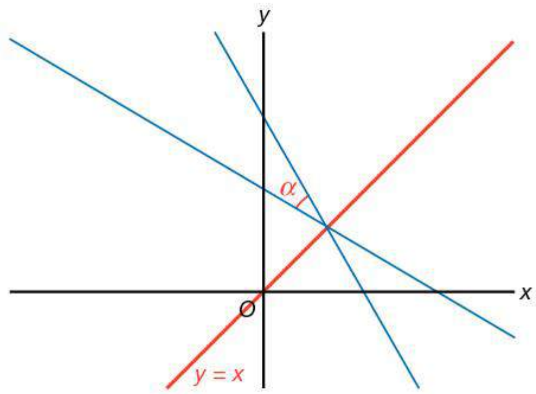
Er geldt $\cos(\alpha) = \dfrac{2a}{a^2 + 1}$.

a Bewijs dit.

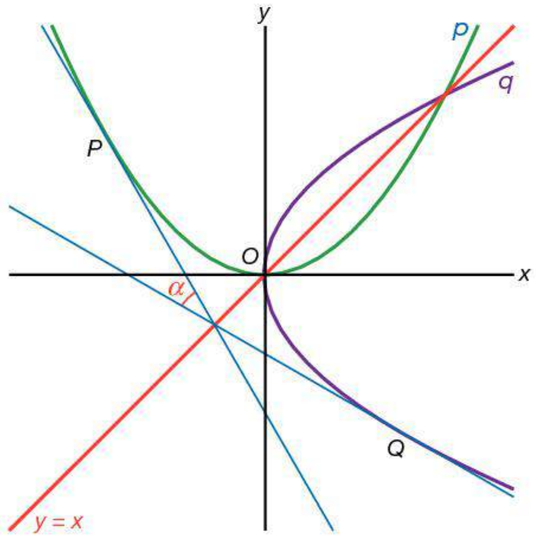
Gegeven zijn de parabool p met vergelijking $x^2 = \frac{1}{2}y$ en de parabool q met vergelijking $y^2 = \frac{1}{2}x$.

p en q zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn met vergelijking $y = x$. Op p ligt een punt P met een negatieve x-coördinaat. De raaklijn in P aan p wordt gespiegeld in de lijn met vergelijking $y = x$. Dit spiegelbeeld raakt q in het punt Q. De hoek tussen de twee raaklijnen is α. In figuur 16.104 is een mogelijke situatie getekend. Er zijn twee gevallen waarin de hoek tussen de twee raaklijnen gelijk is aan 30°.

b Bereken exact de x-coördinaat van P in elk van deze gevallen.



figuur 16.103



figuur 16.104

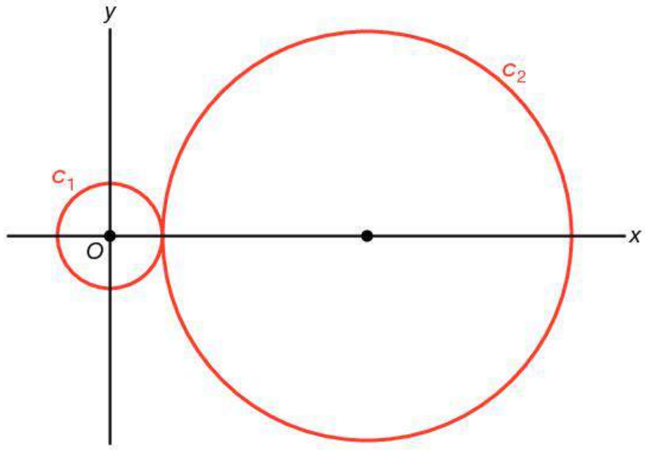
53 2013-II

Gegeven zijn de cirkel c_1 met vergelijking $x^2 + y^2 = 9$ en de cirkel c_2 met vergelijking $(x - 15)^2 + y^2 = 144$. In de figuur zijn c_1 en c_2 getekend. Cirkel c_3 met middelpunt op de positieve y-as raakt de beide cirkels c_1 en c_2.

a Stel een vergelijking op van c_3.

De cirkels c_1 en c_2 hebben drie gemeenschappelijke raaklijnen.

b Stel van elk van deze gemeenschappelijke raaklijnen een vergelijking op.

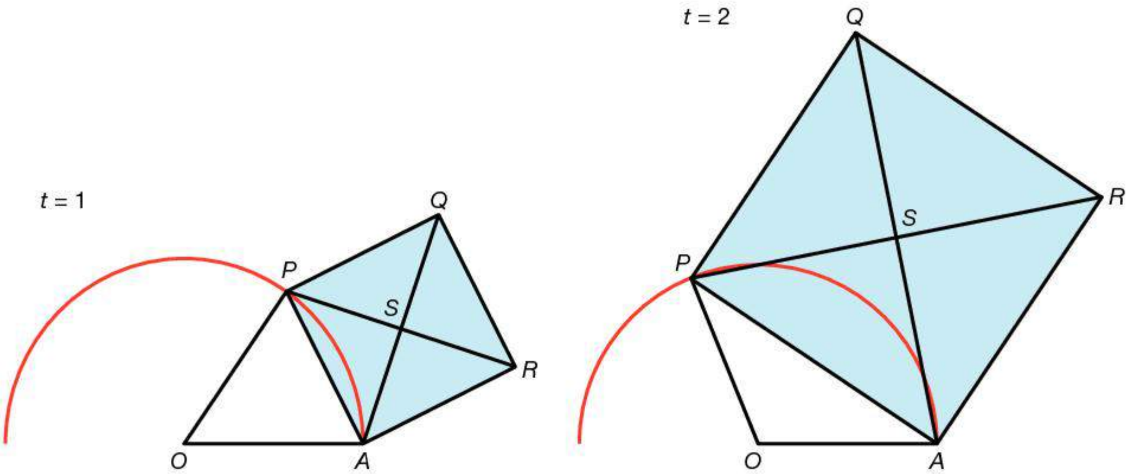


figuur 16.105

54 2014-I

Gegeven zijn de punten $O(0, 0)$ en $A(2, 0)$. Punt P beweegt over de halve cirkel met middelpunt O en straal 2 volgens de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 2\sin(t) \end{cases}$ met $0 < t < \pi$.

Tegen de zijde AP van driehoek OAP ligt een vierkant $ARQP$. Dit vierkant ligt buiten driehoek OAP. Punt S is het snijpunt van de diagonalen van vierkant $ARQP$. In figuur 16.106 is de situatie op de tijdstippen $t = 1$ en $t = 2$ weergegeven.



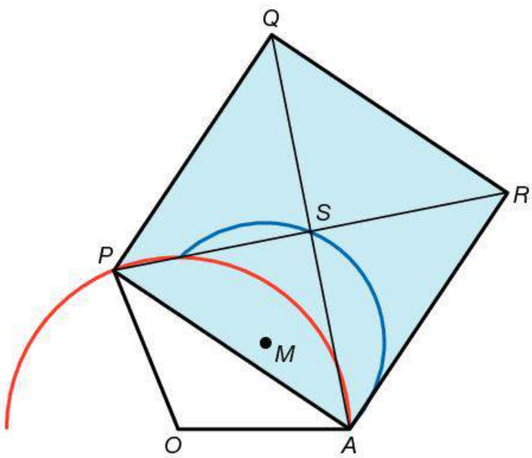
figuur 16.106

Er geldt $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) + \sin(t) \\ 1 - \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix}$.

a Bewijs dit.

In figuur 16.107 is een deel getekend van de baan waarover S beweegt tijdens de beweging van punt P. Figuur 16.107 doet vermoeden dat de baan van S een cirkel is met middelpunt $M(1, 1)$.

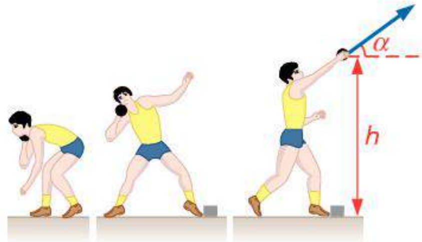
b Bewijs dat de afstand van S tot het punt $M(1, 1)$ constant is.



figuur 16.107

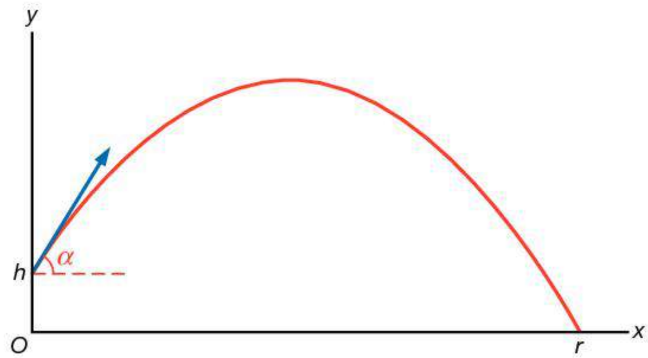
55 **2014-I**

Een kogelstoter stoot een kogel weg onder een hoek α, in radialen, met $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$. De hoogte in meter waarop de kogelstoter de kogel loslaat is h. Zie figuur 16.108. Bij deze situatie kiezen we een assenstelsel waarbij de plaats waar de kogel wordt losgelaten zich op hoogte h op de verticale as bevindt. De kogel komt op afstand r in meter van de oorsprong op de grond. Zie figuur 16.109.



figuur 16.108

In deze opgave gaan we ervan uit dat de kogelstoter de kogel altijd met dezelfde snelheid wegstoot.
Als α zo is dat $\cos(\alpha) = 0{,}6$ en we de afmetingen van de kogel en de wrijving met de lucht verwaarlozen, dan gelden (bij benadering) de volgende formules voor de coördinaten van de kogel tijdens de vlucht



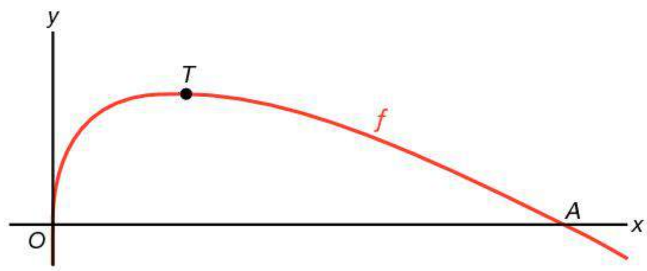
figuur 16.109

$$\begin{cases} x(t) = 8{,}4t \\ y(t) = h + 11{,}2t - 4{,}9t^2 \end{cases}$$

Hierin is t de tijd in seconden met $t = 0$ op het moment van loslaten, x de horizontale afstand in meter en y de hoogte in meter.
Bereken de snelheid van de kogel op tijdstip $t = 0$.

56 **2014-II**

Voor $x \geq 0$ is de functie f gegeven door $f(x) = 3\sqrt{x} - x$.
De punten $O(0, 0)$ en $A(9, 0)$ liggen op de grafiek van f. Het punt T is het hoogste punt van deze grafiek. Zie figuur 16.110.
De coördinaten van T zijn $\left(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$.

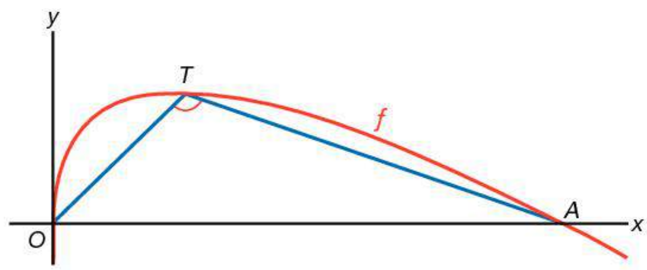


figuur 16.110

a Bewijs dat de coördinaten van T inderdaad $\left(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$ zijn.

In figuur 16.111 is hoek OTA aangegeven.

b Bereken de grootte van hoek OTA.
Rond je antwoord af op een geheel aantal graden.



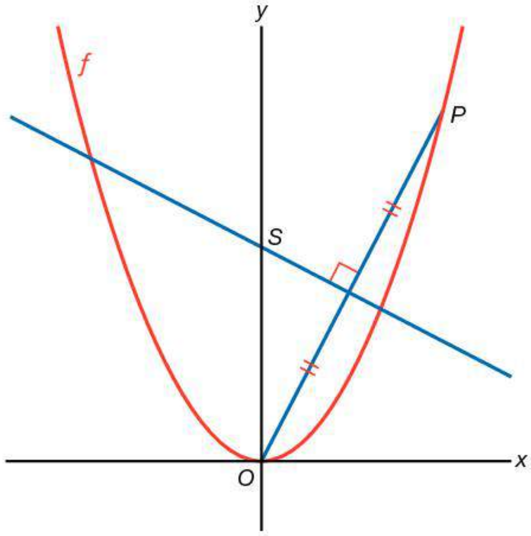
figuur 16.111

57 **2014-II**

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2$. Op de grafiek van f ligt rechts van de y-as een punt $P(p, p^2)$. De middelloodlijn van OP snijdt de y-as in een punt S. Zie figuur 16.112.

Als P over de grafiek van f naar de oorsprong toe beweegt, dan nadert de y-coördinaat van S tot een bepaalde waarde.

Bereken exact deze waarde.



figuur 16.112

16

58 **2015-I**

Over de cirkel met middelpunt (0, 0) en straal 1 beweegt een punt A met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

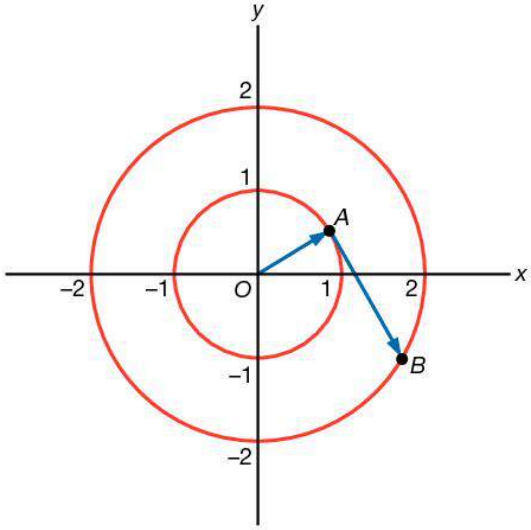
Over de cirkel met middelpunt (0, 0) en straal 2 beweegt een punt B met bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin(2t) \\ y(t) = 2\cos(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Op het interval $\langle 0, \pi \rangle$ is er één tijdstip waarop lijnstuk AB raakt aan de kleinste cirkel. Zie figuur 16.113.

Op dit tijdstip staat de vector $\overrightarrow{AB}$ loodrecht op de vector $\overrightarrow{OA}$.

Bereken exact dit tijdstip.



figuur 16.113

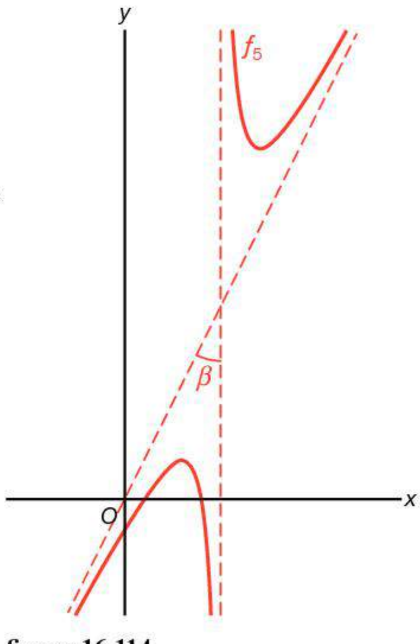
59 **2015-I**

Voor elke waarde van a wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \dfrac{4x^2 - 10x + 4}{2x - a}$ met $x \neq \frac{1}{2}a$. De grafiek van f_5 heeft een verticale asymptoot en een scheve asymptoot. De twee asymptoten snijden elkaar onder een hoek β met β in graden. In figuur 16.114 is de grafiek van f_5 met de asymptoten en hoek β weergegeven.

a Bereken algebraïsch de waarde van β.

Er zijn waarden van a, zoals $a = 5$ (zie figuur 16.114), waarvoor de grafiek van f_a twee toppen heeft. De top met de kleinste x-coördinaat noemen we de linkertop. Er is een waarde van a waarvoor de linkertop op de y-as ligt.

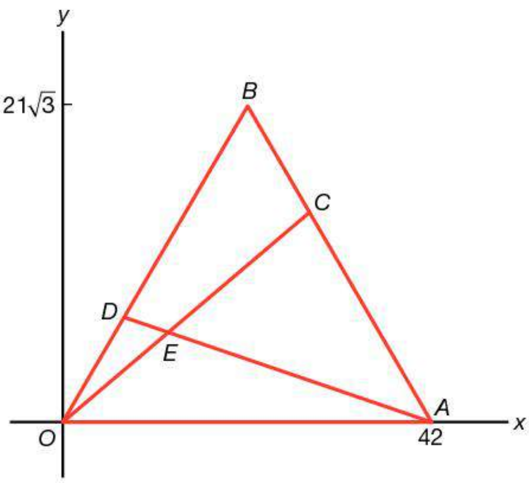
b Bereken exact voor welke waarde van a de linkertop op de y-as ligt.



figuur 16.114

60 Gegeven zijn de punten O, A en B met coördinaten $O(0, 0)$, $A(42, 0)$ en $B\left(21, 21\sqrt{3}\right)$. Driehoek OAB is gelijkzijdig. Op zijde AB ligt punt C zo, dat $AC = \frac{2}{3} \cdot AB$ en op zijde BO ligt punt D zo, dat $BD = \frac{2}{3} \cdot BO$. Punt E is het snijpunt van de lijnstukken OC en AD. Zie figuur 16.115.
Punt E heeft coördinaten $E\left(12, 6\sqrt{3}\right)$.

a Laat met exacte berekeningen zien dat de x-coördinaat van E inderdaad gelijk is aan 12.

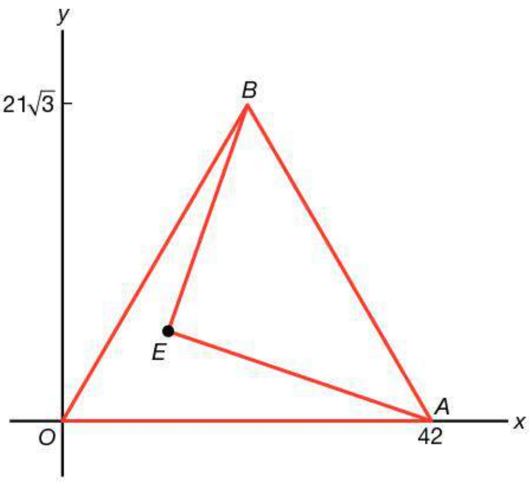


figuur 16.115

16

In figuur 16.116 is opnieuw driehoek OAB getekend, nu met de lijnstukken AE en BE.

b Bewijs dat $\angle AEB = 90°$.



figuur 16.116

61 **2015-II**

De beweging van een punt P wordt beschreven door de vectorvoorstelling

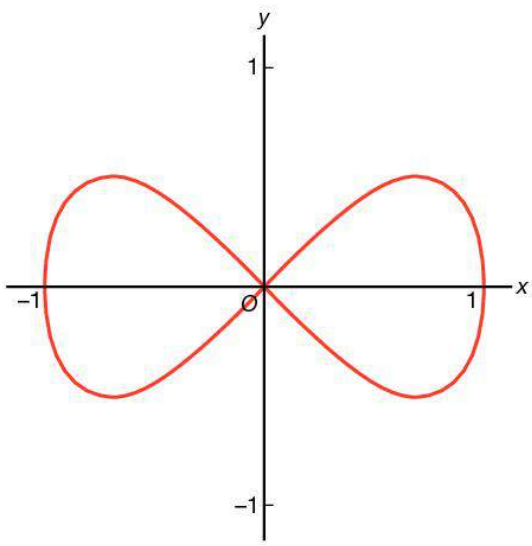
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

In figuur 16.117 is de baan van P getekend. Deze baan wordt *lemniscaat* genoemd. Tijdens de beweging passeert punt P vier keer de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{4}$.

a Bereken exact voor welke waarden van t dit het geval is.

Tijdens de beweging gaat P twee keer door de oorsprong O. De richtingen waarin P de oorsprong passeert zijn verschillend.

b Bereken exact de hoek tussen deze twee richtingen.

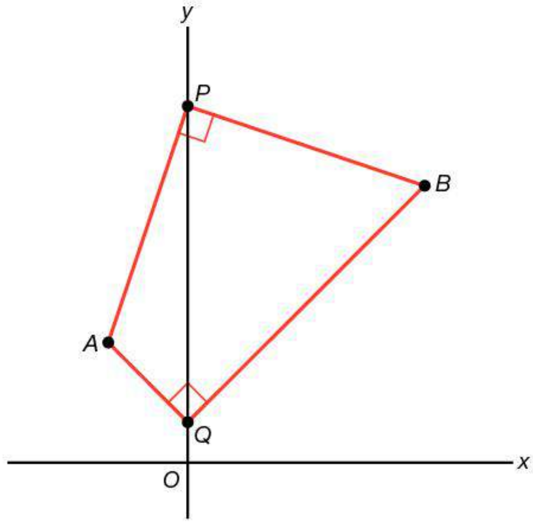


figuur 16.117

62 **2015-II**

Gegeven zijn de punten $A(-2, 3)$ en $B(6, 7)$.
In figuur 16.118 zijn op de y-as de punten P en Q getekend waarvoor geldt dat $\angle APB = \angle AQB = 90°$.

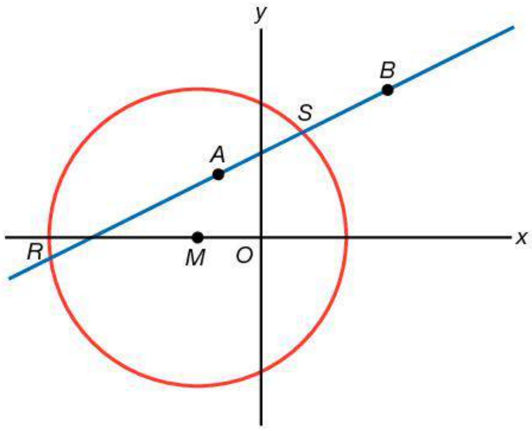
a Bereken exact de coördinaten van P en Q.



figuur 16.118

In figuur 16.119 is de lijn door A en B getekend. Ook is een cirkel getekend met middelpunt $M(-3, 0)$. Deze cirkel snijdt de lijn door A en B in de punten R en S met $RS = 6\sqrt{5}$.

b Bereken exact de straal van de cirkel.

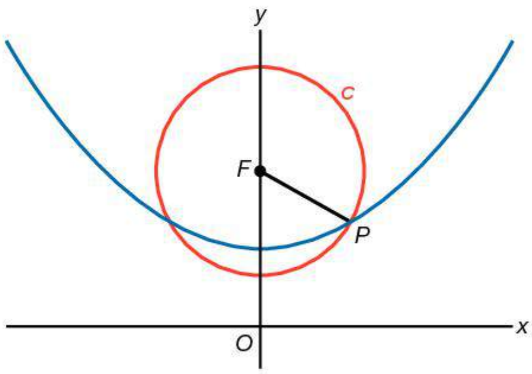


figuur 16.119

63 **2015-II**

Gegeven zijn het punt $F(0, 4)$ en de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{8}x^2 + 2$.
Punt P op de parabool ligt rechts van de y-as en heeft x-coördinaat p. De cirkel c met middelpunt F gaat door P.
In figuur 16.120 is deze situatie voor een bepaalde waarde van p getekend.
Voor de lengte van de straal FP van de cirkel geldt $FP = \frac{1}{8}p^2 + 2$.

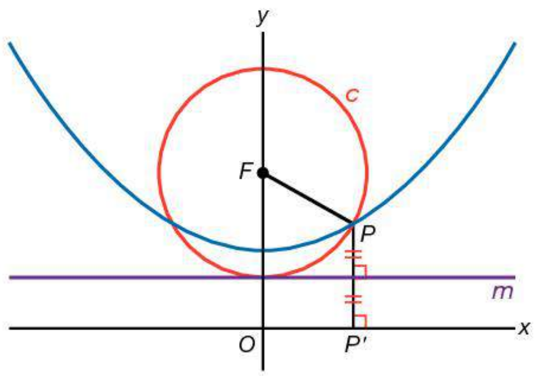
a Bewijs dit.



figuur 16.120

Punt P' is de loodrechte projectie van P op de x-as en lijn m is de middelloodlijn van lijnstuk PP'. Afhankelijk van de positie van punt P op de parabool hebben c en m nul, één of twee punten gemeenschappelijk. In figuur 16.121 is de situatie getekend waarin m en de cirkel elkaar op de y-as raken.

b Bereken exact de waarde van p voor de in figuur 16.121 getekende situatie.



figuur 16.121

16.6 Eindexamens 2016

2016, tijdvak 1
Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 79 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.
Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

16

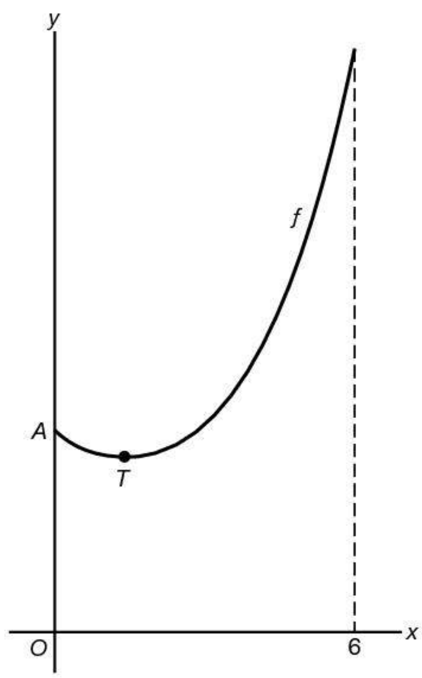
Goniometrie
$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$
$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$
$\cos(t+u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$
$\cos(t-u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$
$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$
$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$

Kettinglijn
De functie f is gegeven door

$$f(x) = \tfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\tfrac{1}{2}.$$

In figuur 16.122 is de grafiek van f, een zogenaamde kettinglijn, op het domein [0, 6] getekend.
Punt T is het laagste punt van de grafiek en punt A is het gemeenschappelijke punt van de grafiek met de y-as. De x-coördinaat van T is ongeveer 1,4.

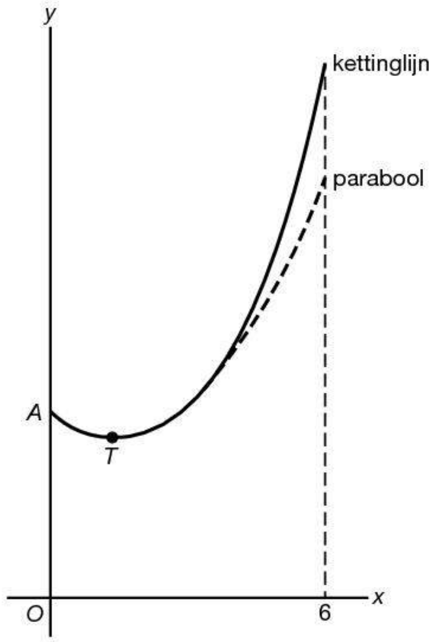
4p **1** Bereken exact de waarde van de x-coördinaat van T.



figuur 16.122

In figuur 16.123 zijn de grafiek van de functie f en de parabool door A met top T getekend. In deze figuur is te zien dat de parabool de kettinglijn aanvankelijk goed benadert, maar dat voor grotere waarden van x de benadering minder goed wordt. Van de parabool door A met top T kan een vergelijking van de vorm $y = a(x - b)^2 + c$ worden opgesteld.

6p **2** Bereken de waarde van x waarvoor het (verticale) hoogteverschil tussen de kettinglijn en deze parabool gelijk is aan 1. Rond je antwoord af op één decimaal.



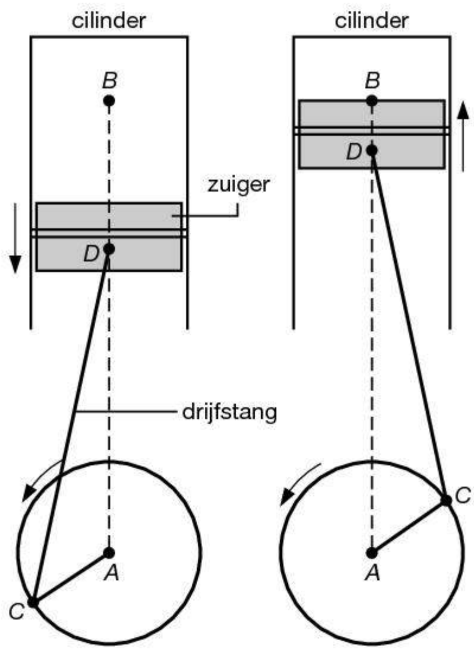
figuur 16.123

16

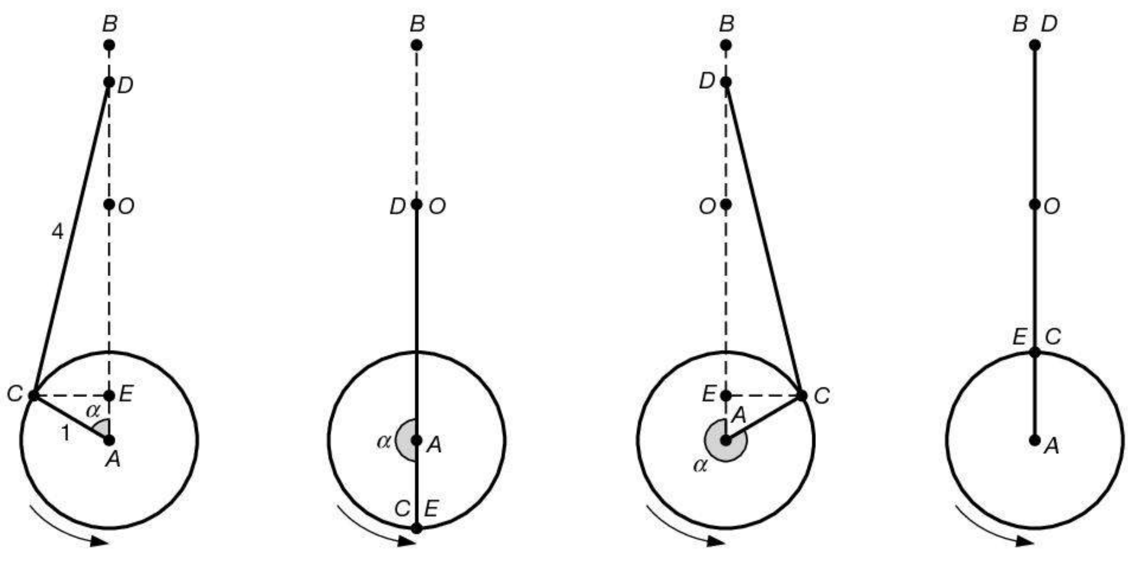
Automotor

In een automotor wordt de op- en neergaande beweging van een zuiger via een drijfstang omgezet in een draaiende beweging. In figuur 16.124 zijn twee standen getekend. In de eerste stand beweegt de zuiger omlaag en in de tweede stand omhoog.

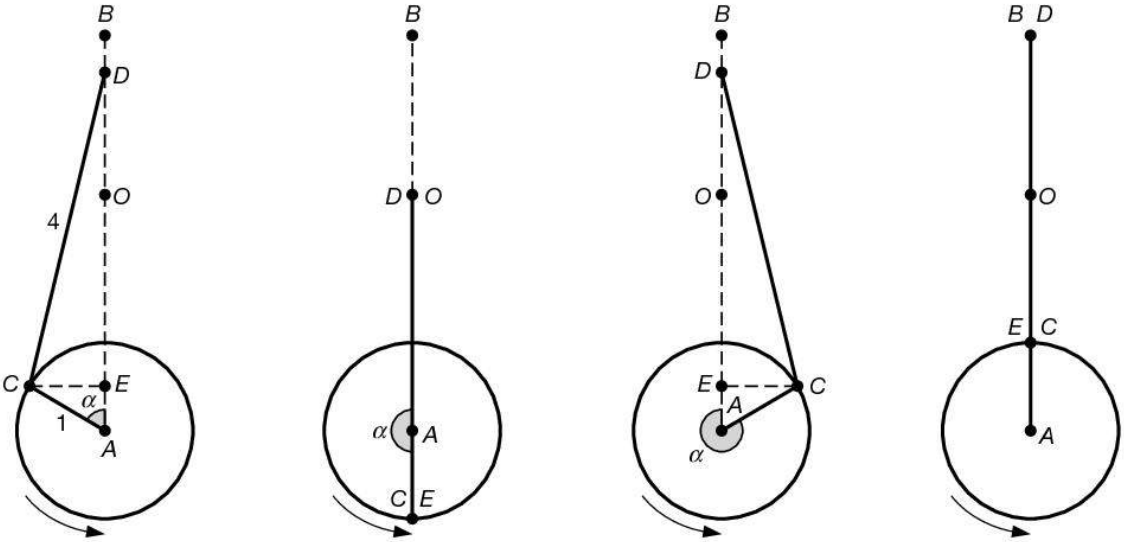
In figuur 16.125 zijn vier standen schematisch getekend. A is een vast punt, D beweegt verticaal over AB en C draait over een cirkel met straal 1 en middelpunt A waarbij CD een vaste lengte 4 heeft. De grootte van hoek CAD (in radialen) noemen we α. Punt E is de loodrechte projectie van C op lijn AD.



figuur 16.124



figuur 16.125



figuur 16.126

16

Punt D beweegt op en neer tussen zijn hoogste punt B ($\alpha = 0$ en $\alpha = 2\pi$) en zijn laagste punt O ($\alpha = \pi$).

De afstand van D tot B noemen we s.
s hangt af van α. Er geldt: $s = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$, met $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

5p **3** Bewijs dit voor de meest linkse van de in figuur 16.126 getekende standen $\left(\text{dus voor } 0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi\right)$

In de techniek wordt s soms benaderd met behulp van de formule
$z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$.

Om te onderzoeken of de formule $z = 1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha)$ een goede benadering voor s geeft, wordt het maximale verschil tussen s en z berekend.

3p **4** Bereken in drie decimalen nauwkeurig dit maximale verschil.

Zowel in B als in O is de snelheid van de zuiger gelijk aan 0. Tijdens de beweging wordt voor een waarde van α, met $0 < \alpha < \pi$, de maximale zuigersnelheid bereikt.

4p **5** Stel een formule voor de afgeleide van z op en bereken hiermee de maximale zuigersnelheid. Rond je antwoord af op twee decimalen.

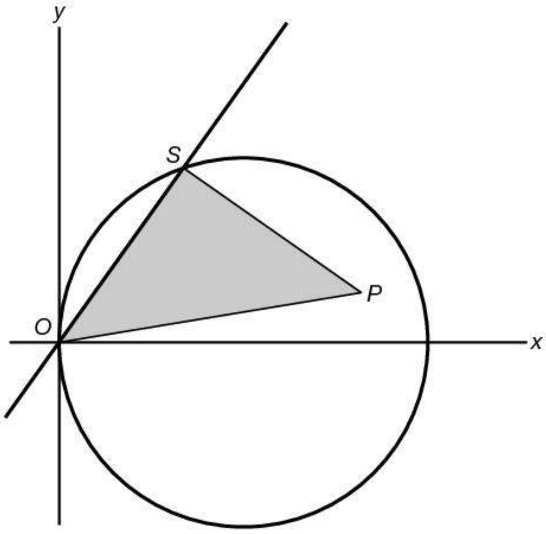
Een driehoek draaiend over een cirkel

Gegeven is de cirkel met vergelijking $(x-1)^2+y^2=1$. Voor elke waarde van a is gegeven de lijn met vergelijking $y=ax$. Elk van deze lijnen snijdt de cirkel in twee punten, namelijk in O en S. De coördinaten van S zijn afhankelijk van a.

De vector $\overrightarrow{SP}$ is het beeld van $\overrightarrow{SO}$ bij een rotatie om S over 90°. Zie figuur 16.127, waarin ook driehoek OPS is weergegeven.

Voor de coördinaten van P geldt:

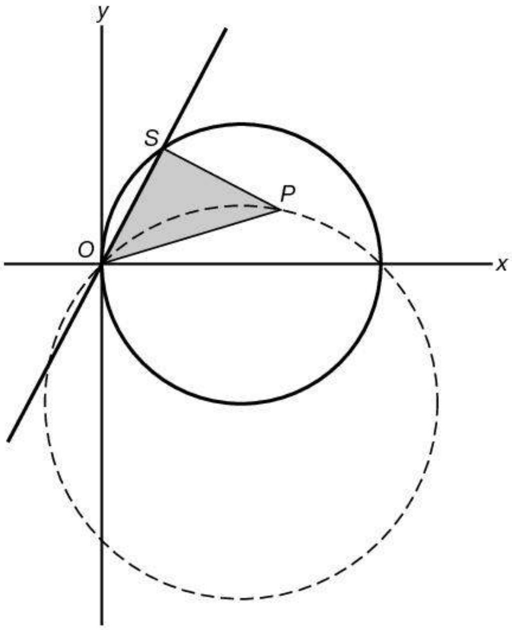
$$x_p=\frac{2a+2}{a^2+1} \text{ en } y_p=\frac{2a-2}{a^2+1}$$



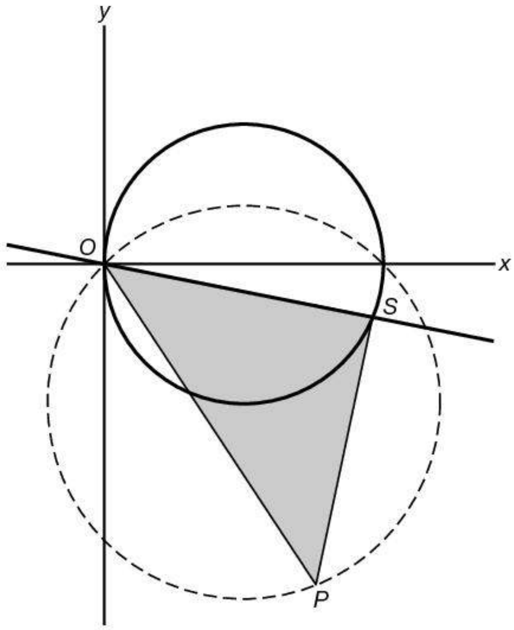
figuur 16.127

7p **6** Bewijs dat deze formules voor x_P en y_P correct zijn.

Bij elke waarde van a hoort een positie van P. In figuur 16.128 en figuur 16.129 is voor twee waarden van a deze positie getekend. Als a varieert, beweegt P over een cirkel door O. Deze cirkel is gestippeld getekend.



figuur 16.128



figuur 16.129

5p **7** Stel van de gestippelde cirkel een vergelijking op.

Er is een waarde van a waarvoor x_P maximaal is.

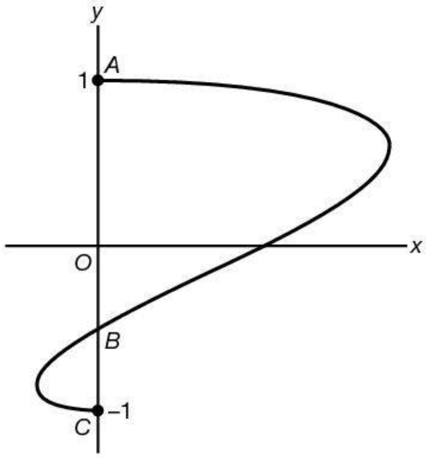
5p **8** Bereken exact deze waarde van a.

Snelheid op een baan

Voor $0 \leq t \leq \pi$ is de baan van het punt P gegeven door de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) + \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

In de figuur is de baan van P weergegeven.
Op $t = 0$ bevindt P zich in het hoogste punt $A(0, 1)$ van de baan.
Op $t = \pi$ bevindt P zich in het laagste punt $C(0, -1)$ van de baan.
Tussen $t = 0$ en $t = \pi$ snijdt de baan de y-as één keer in het punt B.



figuur 16.130

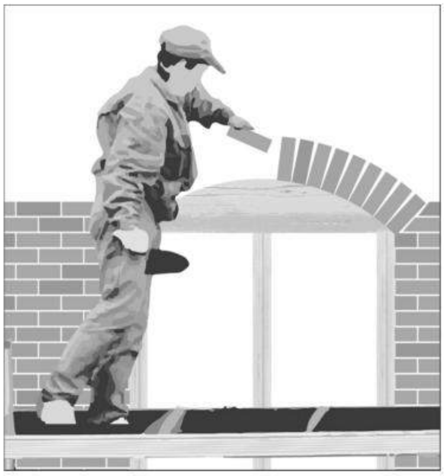
8p **9** Bereken exact de snelheid van P in punt B.

16

Metselboog

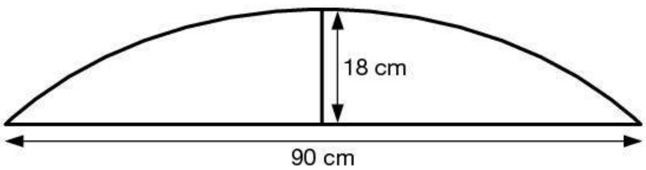
In sommige gebouwen zijn boven een raam of een deur bakstenen gemetseld in de vorm van een cirkelboog. Zie figuur 16.131.
Om deze bakstenen tijdens de bouw op de juiste wijze te kunnen plaatsen, wordt gebruikgemaakt van een houten mal, een zogenoemde metselboog. Zie figuur 16.132.

figuur 16.131



figuur 16.132

De metselaar vraagt aan de timmerman om een metselboog te maken. De breedte moet 90 cm worden en de hoogte 18 cm. In figuur 16.133 is het vooraanzicht van de metselboog met de genoemde maten weergegeven.



figuur 16.133

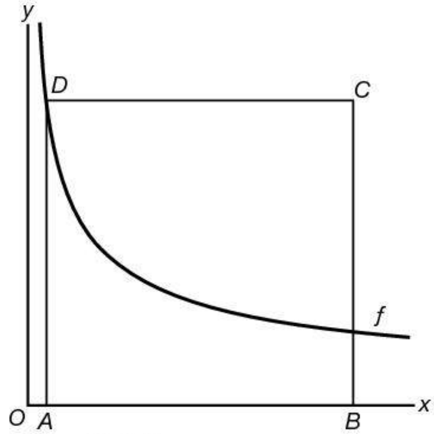
De bovenrand van de metselboog is een deel van een cirkel. Om de metselboog te kunnen maken, moet de timmerman de straal van deze cirkel berekenen.

5p **10** Bereken algebraïsch deze straal. Rond je antwoord af op een geheel aantal cm.

Vierkant bij een grafiek

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Van vierkant $ABCD$ liggen de hoekpunten A en B op de x-as en het hoekpunt D op de grafiek van f. Zie figuur 16.134.



figuur 16.134

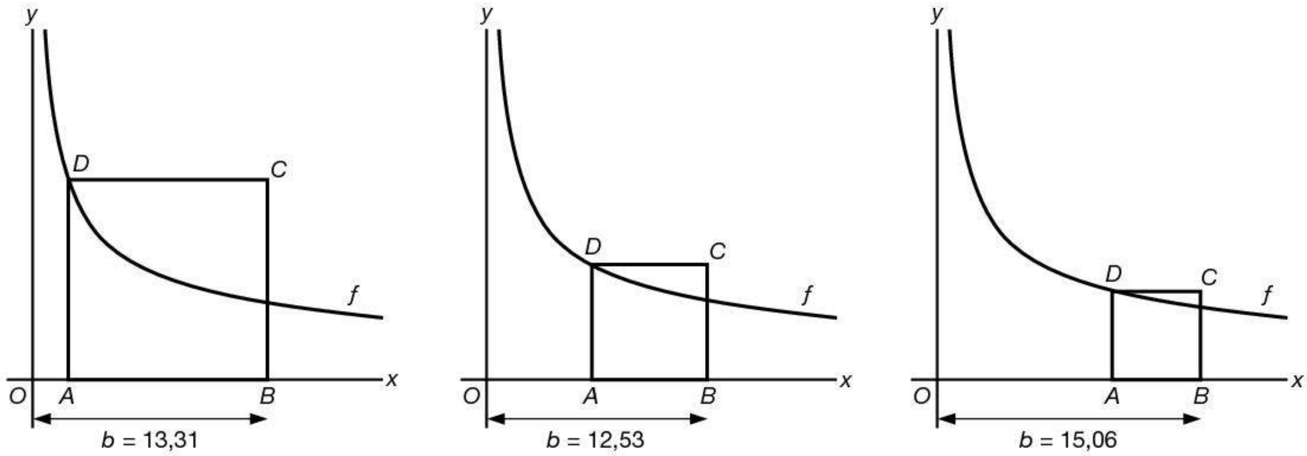
De x-coördinaten van A en B noemen we respectievelijk a en b, met $0 < a < b$.

De coördinaten van D zijn dan $\left(a, \frac{16}{\sqrt{a}}\right)$.

Voor $a = 1$ ontstaat het vierkant met zijde 16. V is het deel van dit vierkant dat zich boven de grafiek bevindt. Vlakdeel V wordt gewenteld om de x-as.

5p **11** Bereken exact de inhoud van het bijbehorende omwentelingslichaam.

In figuur 16.135 zijn enkele mogelijke situaties voor vierkant $ABCD$ getekend.



figuur 16.135

Bij de getekende situaties is de afstand van punt B tot de oorsprong aangegeven. Deze afstand b hangt af van a, de x-coördinaat van A. Als a vanaf 0 toeneemt, neemt b eerst af en vervolgens weer toe. Er is dus een waarde van a waarvoor b minimaal is.

5p **12** Bereken exact de minimale waarde van b.

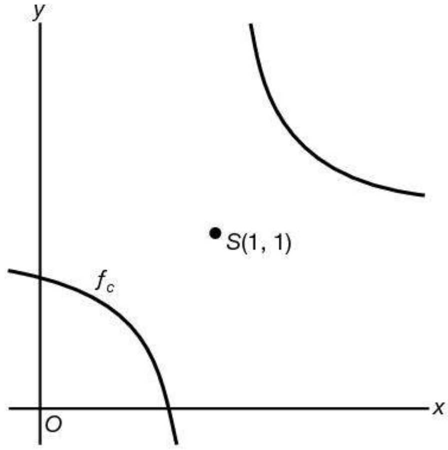
Limietpunt

Voor $c > 0$ is de functie f_c gegeven door: $f_c(x) = \dfrac{1}{c(x-1)} + 1$

3p **13** Bewijs dat voor elke waarde van c de functie f_c de inverse is van zichzelf.

Punt S is het punt met coördinaten (1, 1).
In figuur 16.136 is voor een waarde van c de grafiek van f_c weergegeven.
De grafiek van f_c is puntsymmetrisch ten opzichte van S als voor elke waarde van p geldt:

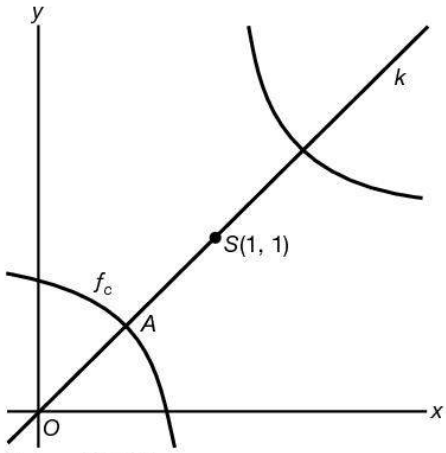
$$\frac{f_c(1+p) + f_c(1-p)}{2} = 1$$



figuur 16.136

3p **14** Bewijs met behulp van deze formule dat voor elke waarde van c de grafiek van f_c puntsymmetrisch is ten opzichte van S.

Lijn k is de lijn met vergelijking $y = x$. Lijn k snijdt de grafiek van f_c in twee punten. Punt A is het linker snijpunt.
In figuur 16.137 is de situatie van figuur 1 uitgebreid met A en k.
Als c groter wordt, verschuift A over lijn k, waarbij zowel de x-coördinaat als de y-coördinaat van A toenemen. Als c onbegrensd toeneemt, naderen zowel de x-coördinaat als de y-coördinaat van A tot een limietwaarde. Het punt A nadert daarom tot een vast punt: het limietpunt van A.

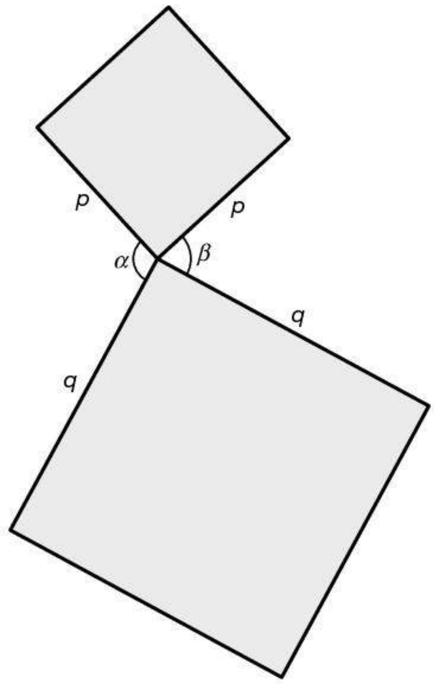


figuur 16.137

5p **15** Druk de coördinaten van A uit in c en bewijs met behulp van deze coördinaten dat S het limietpunt is van A.

Vier vierkanten

Gegeven zijn twee vierkanten, één met zijde p en één met zijde q. De vierkanten hebben één hoekpunt gemeenschappelijk.
De hoeken die de zijden van de vierkanten met elkaar maken in het gemeenschappelijke hoekpunt noemen we α en β. Zie figuur 16.138.

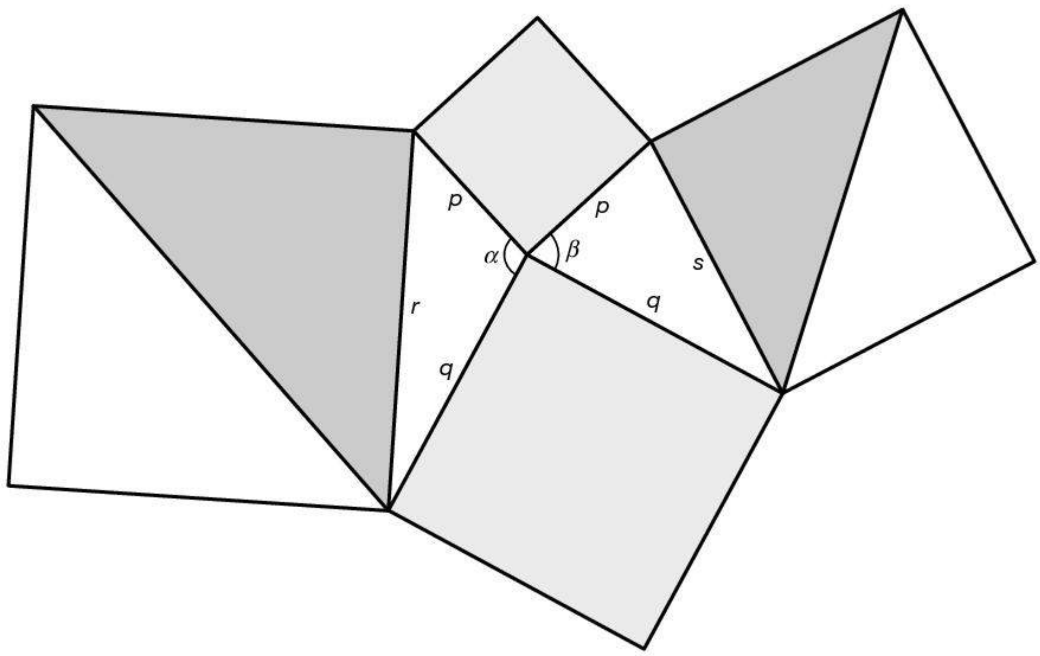


figuur 16.138

16

Figuur 16.139 is een uitbreiding van figuur 16.138. Er zijn twee vierkanten toegevoegd:

- een vierkant met zijde r dat met elk van de vierkanten uit figuur 16.138 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft;
- een vierkant met zijde s dat met elk van de vierkanten uit figuur 16.138 één hoekpunt gemeenschappelijk heeft.



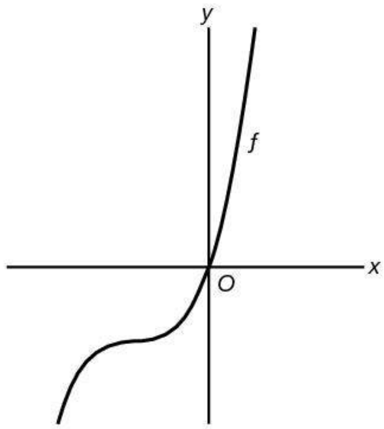
figuur 16.139

In figuur 16.139 zijn de vierkanten met zijden p en q lichtgrijs gekleurd; van elk van de vierkanten met zijden r en s is de helft donkergrijs gekleurd.

6p **16** Bewijs dat de totale oppervlakte van de lichtgrijze delen gelijk is aan de totale oppervlakte van de donkergrijze delen.

2016, tijdvak 2
Dit examen bestaat uit 16 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.

De derde macht
De functie f wordt gegeven door $f(x) = (x+1)^3 - 1$.
In de figuur is de grafiek van f weergegeven.



figuur 16.140

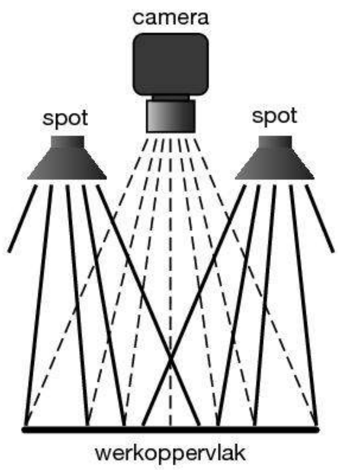
De functie g wordt gegeven door $g(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$.
De functie g is de inverse functie van f.

3p **1** Bewijs dat g inderdaad de inverse functie is van f.

De grafieken van f en g hebben gemeenschappelijke punten.

6p **2** Bereken exact de coördinaten van deze punten.

Spots
Veel industriële en medische processen worden gestuurd door een digitale camera die gekoppeld is aan een computer. Hierbij is een gelijkmatige verlichting van het werkoppervlak van groot belang. Voor de belichting gebruikt men vaak een of meer kleine spots.
Zie figuur 16.141.



figuur 16.141

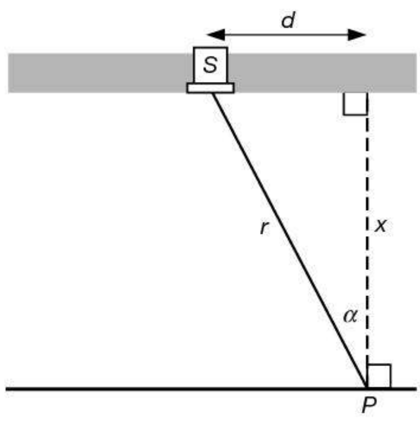
Om de belichting goed te kunnen instellen is de hoogte van de spots boven het werkoppervlak variabel.

We bekijken eerst de situatie met één spot S. Zie figuur 16.142.

De waargenomen verlichtingssterkte E (in lux) in een punt P van een horizontaal oppervlak kan berekend worden met de formule:

$$E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi r^2} \cdot \cos(\alpha)$$

Hierin is:
- I_{spot} een constante: de door de spot uitgezonden lichtstroom (in microlumen)
- r de afstand (in mm) tot de spot
- α de hoek (in radialen) tussen de lichtstraal en de loodlijn in P op het werkoppervlak.



figuur 16.142

In figuur 16.142 is d de horizontale afstand in mm van de spot tot P en x de verticale afstand in mm van de spot tot P. Er geldt:

$$E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

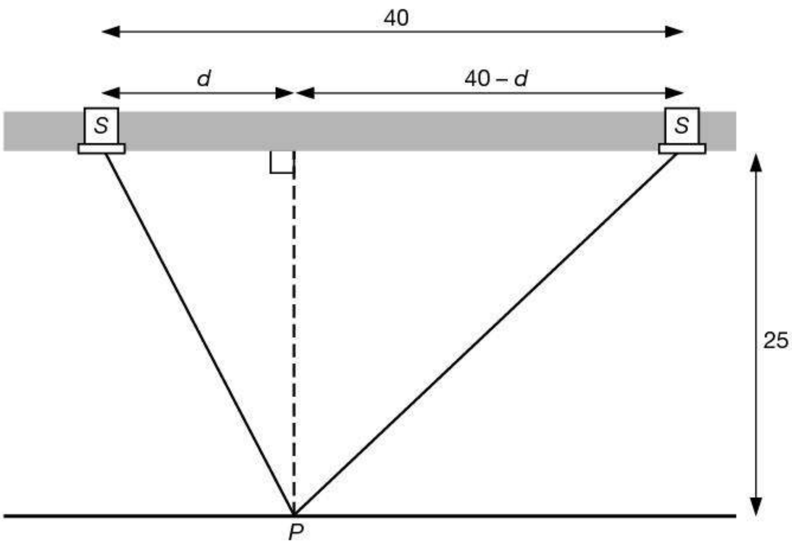
4p **3** Bewijs dit.

We kiezen $d = 10$. Er is een waarde van x waarvoor E maximaal is.

7p **4** Bereken algebraïsch deze waarde van x. Rond je antwoord af op één decimaal.

In de rest van deze opgave bekijken we de situatie met twee identieke spots. Voor elke spot geldt: $I_{\text{spot}} = 500$. De spots hebben horizontaal een onderlinge afstand van 40 mm en schijnen recht naar beneden. De verticale afstand van de spots tot het werkoppervlak is 25 mm. Zie figuur 16.143. Hierin is ook d aangegeven, de horizontale afstand in mm van de linker spot tot P.

16



figuur 16.143

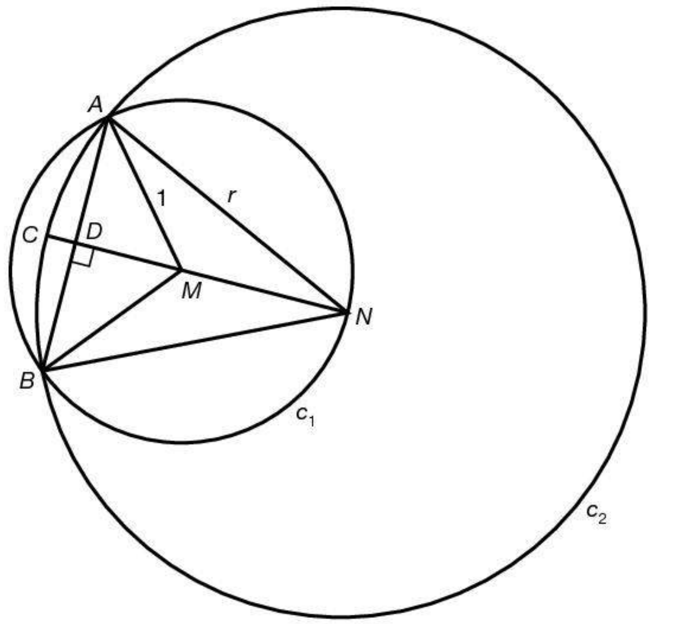
De totale verlichtingssterkte E_{totaal} in een punt op het werkoppervlak is de som van de waargenomen verlichtingssterktes in dat punt van beide spots.

Het deel van het werkoppervlak tussen de spots wordt voldoende gelijkmatig belicht als de laagste waarde van E_{totaal} in dat deel minstens 80% van de hoogste waarde van E_{totaal} bedraagt.

6p **5** Onderzoek of bij de ingestelde verticale afstand van 25 mm het deel van het werkoppervlak tussen de spots voldoende gelijkmatig belicht wordt.

Twee snijdende cirkels

[▶ WERKBLAD] Gegeven is cirkel c_1 met straal 1 en middelpunt M. Op de cirkel ligt punt N. Punt N is het middelpunt van cirkel c_2 met straal r waarbij $1 < r < 2$.
De twee cirkels snijden elkaar in de punten A en B. Zie figuur 16.144, die ook op het werkblad staat.



figuur 16.144

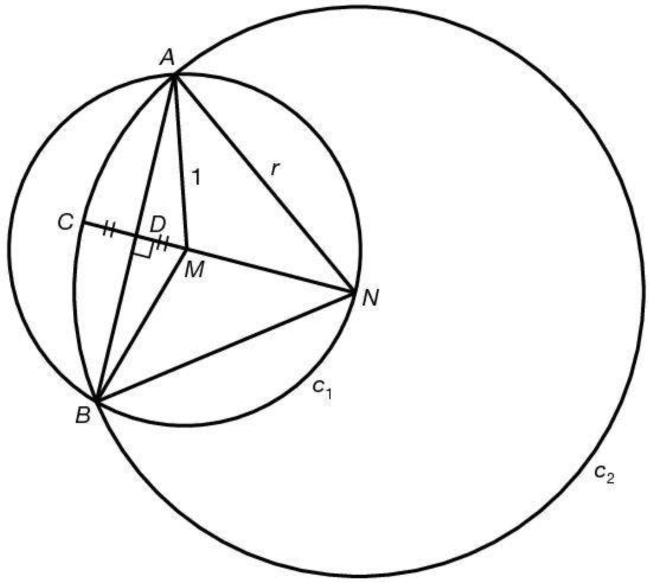
Lijn MN snijdt cirkel c_2 in punt C en lijnstuk AB in punt D. Lijnstuk AB staat loodrecht op lijn MN.

Er geldt $DN = \frac{1}{2}r^2$.

16

4p **6** Bewijs dat inderdaad geldt $DN = \frac{1}{2}r^2$.
Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad.

Je kunt de waarde van r zo kiezen dat CD en DM even lang zijn. Dan ontstaat de situatie in figuur 16.145, die ook op het werkblad staat.



figuur 16.145

4p **7** Bereken exact deze waarde van r. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op het werkblad.

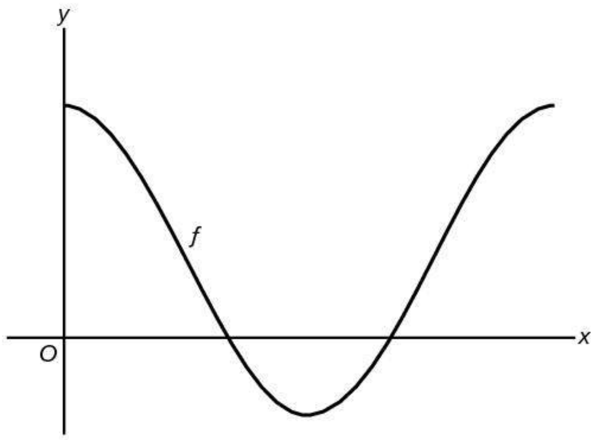
Sinusoïde met perforaties

De functie f wordt gegeven door:

$$f(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{\cos(x)} + 1$$

We bekijken in deze opgave alleen het deel van de grafiek van f waarvoor $x \geq 0$ en $x \leq 2\pi$.

De grafiek van f is een sinusoïde met perforaties. In de figuur is de grafiek van f weergegeven. De perforaties van de grafiek zijn in de figuur niet aangegeven.



figuur 16.146

5p **8** Bereken exact de coördinaten van de perforaties van de grafiek van f.

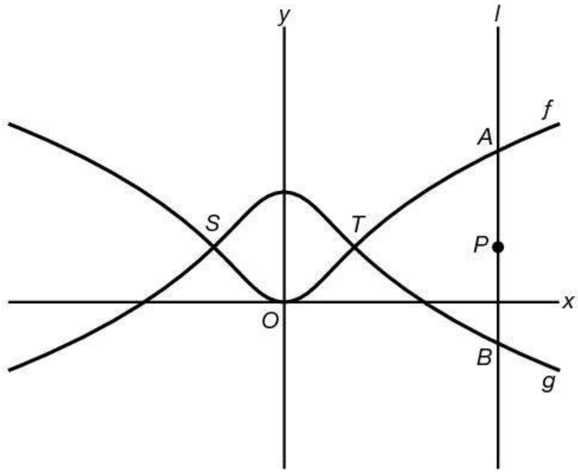
Getransformeerde grafiek

De functies f en g worden gegeven door:

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \text{ en } g(x) = \ln\left(\frac{e^2}{x^2 + 1}\right)$$

De grafieken van f en g staan in figuur 16.147. Ze snijden elkaar in de punten S en T.

Lijn l met vergelijking $x = p$ snijdt de grafiek van f in punt A en de grafiek van g in punt B.
Het punt op lijn l met y-coördinaat 1 noemen we P. In figuur 16.147 is de situatie weergegeven waarbij l rechts van T ligt.

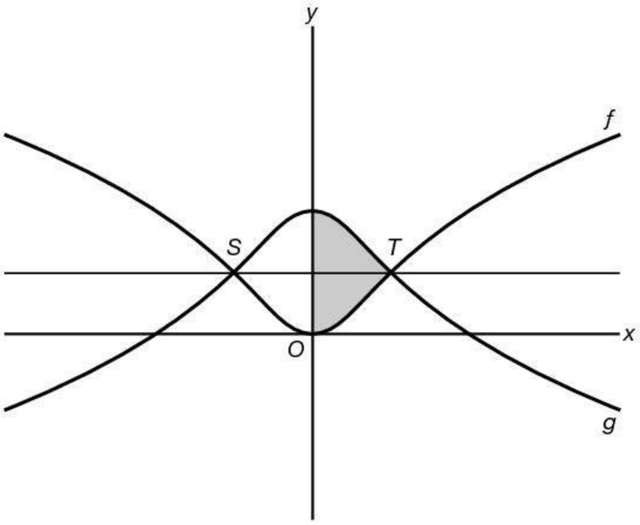


figuur 16.147

3p **9** Bewijs dat in deze situatie $AP = BP$.

Ook voor waarden van p waarvoor l niet rechts van T ligt, geldt dat $AP = BP$. Hieruit volgt dat de grafieken van f en g elkaars gespiegelde zijn in de lijn met vergelijking $y = 1$. Deze lijn is getekend in figuur 16.148.

In figuur 16.148 is het gebied rechts van de y-as dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g en de y-as, grijs gemaakt.

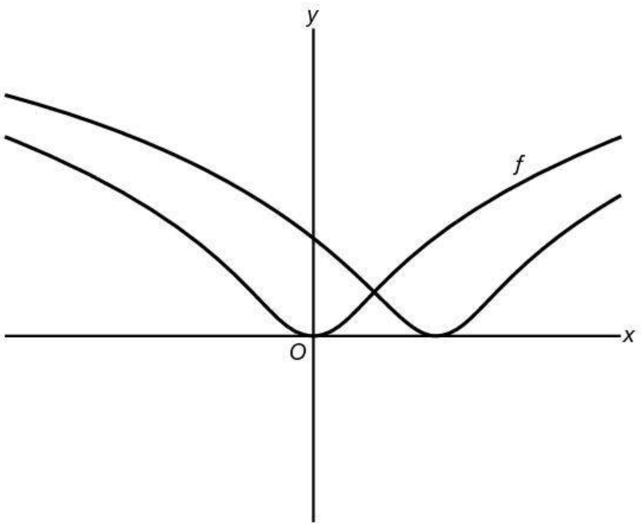


figuur 16.148

Dit gebied wordt gewenteld om de y-as.

5p **10** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam.

De grafiek van f wordt 2 naar rechts verschoven. In figuur 16.149 staan de grafiek van f en de verschoven grafiek.



figuur 16.149

8p **11** Bewijs dat de twee grafieken elkaar loodrecht snijden.

Droogligtijd

In de Waddenzee varieert de waterhoogte in de loop van de tijd. Eb en vloed wisselen elkaar voortdurend af in een getijdencyclus met een periode van ongeveer 745 minuten. De waterhoogte in het oostelijke deel van de Waddenzee kan worden benaderd met de formule:

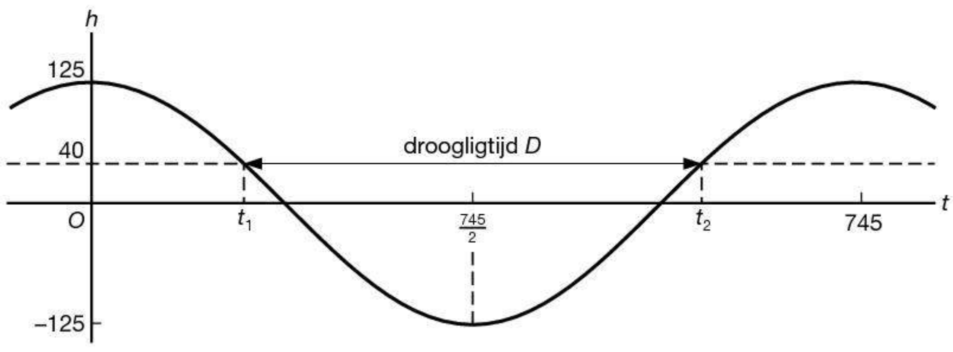
$$h = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t\right)$$

Hierbij is h de waterhoogte in cm ten opzichte van NAP (Normaal Amsterdams Peil) en is t de tijd in minuten. Tijdstip $t = 0$ komt overeen met een moment waarop $h = 125$.

In het oostelijk deel van de Waddenzee liggen verschillende zandbanken die gedurende een deel van een getijdencyclus droog komen te liggen.
De *droogligtijd D* is het aantal minuten per getijdencyclus dat een zandbank niet geheel onder water ligt. De droogligtijd hangt af van de hoogte van de zandbank: de hoogte van het hoogste punt van de zandbank ten opzichte van NAP.

16

In het oostelijk deel van de Waddenzee bevindt zich een zandbank met een hoogte van 40 cm boven NAP.
In figuur 16.150 is de grafiek van de waterhoogte h getekend. Tevens is de hoogte van deze zandbank weergegeven. Gedurende één periode zijn er twee tijdstippen waarop de waterhoogte h gelijk is aan de hoogte van de zandbank. We noemen deze tijdstippen t_1 en t_2. Het verschil tussen t_2 en t_1 is de droogligtijd D.



figuur 16.150

4p **12** Bereken de droogligtijd D van deze zandbank. Rond je antwoord af op een geheel aantal minuten.

Op drooggevallen zandbanken kunnen waddenvogels voedsel vinden. Daarom willen natuuronderzoekers het verband weten tussen de hoogte van de zandbanken en de tijd dat ze droog liggen.

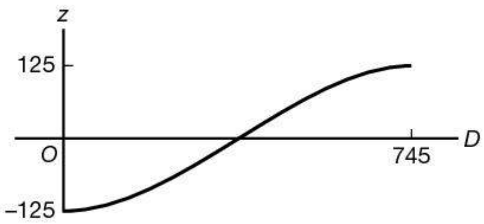
Met z duiden we de hoogte in cm van de zandbank aan, ten opzichte van NAP. Er geldt dan:

$$z = 125\cos\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right)$$

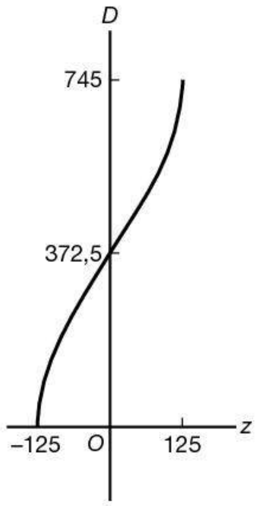
5p **13** Bewijs dit.

In figuur 16.151 is de grafiek van z getekend voor waarden van D tussen 0 en 745.

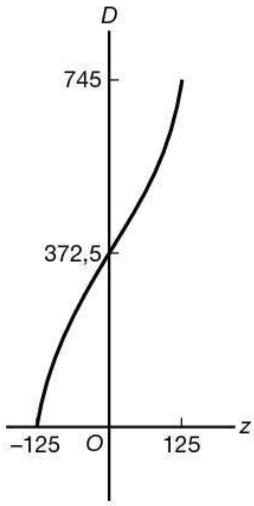
Ook kan een grafiek van het verband tussen D en z worden getekend waarbij z op de horizontale as en D op de verticale as wordt gekozen. Zie figuur 16.152.



figuur 16.151



figuur 16.152



figuur 16.153

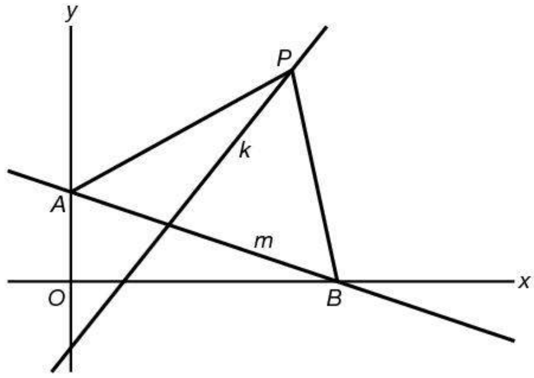
In onderzoeksrapporten wordt, in plaats van de formule die bij figuur 16.152 hoort, ook wel de volgende derdegraads formule gebruikt:
$D = 8 \cdot 10^{-5}z^3 + 1{,}7z + 372{,}5$
De bijbehorende grafiek staat in figuur 16.153.

De grafieken in figuren 16.152 en 16.153 lijken op elkaar. Zo verschillen de hellingen van beide grafieken in het punt (0; 372,5) niet veel.
De helling in een punt op de grafiek van figuur 16.152 kan worden berekend met behulp van de helling in het overeenkomstige punt in figuur 16.151: er geldt dat het product van deze twee hellingen gelijk is aan 1.

5p **14** Bereken op algebraïsche wijze bij elk van de figuren 16.152 en 16.153 de helling van de grafiek in het punt (0; 372,5). Rond je antwoorden af op één decimaal.

Punt bewegend over een lijn

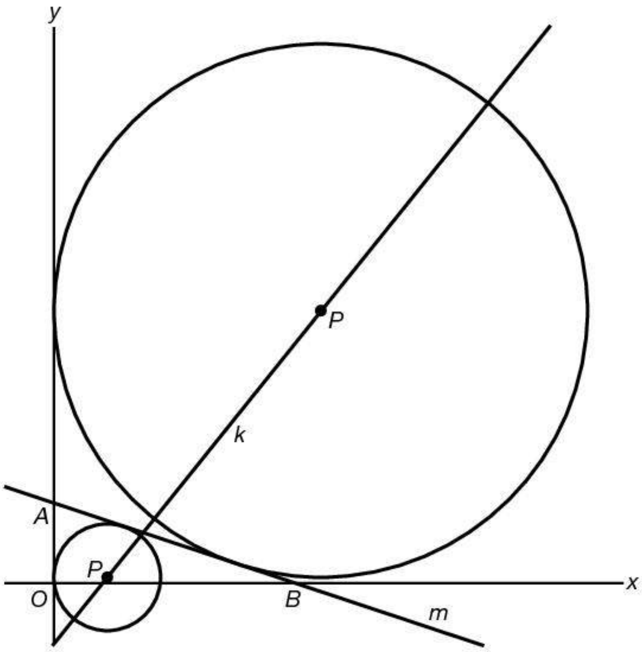
Lijn k is de lijn met vectorvoorstelling
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Punt P beweegt over lijn k.
Lijn m gaat door de punten $A(0, 2)$ en $B(6, 0)$.
Zie figuur 16.154.



figuur 16.154

5p **15** Bereken exact de coördinaten van P in de situatie dat $AP = BP$.

Er zijn twee posities van P waarvoor een cirkel met middelpunt P bestaat die zowel raakt aan de y-as als aan lijn m. In figuur 16.155 zijn deze twee cirkels getekend.



figuur 16.155

7p **16** Bereken van beide cirkels de straal. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Gemengde opgaven

13 Limieten en asymptoten

1 Bereken.

a $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 9}$

b $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2a - x^2}{(x + a)(x - a)}$

c $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{3 + \ln\left(x^4\right)}$

d $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{e^{2x} - e^6}{e^3 - e^x}$

e $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{2x+2}}{e^{2x} + 2}$

f $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{2 + \ln(x^3)}$

2 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{ax + 4}{2x - 3}$.

Bereken exact voor welke a

a de grafiek van f een perforatie heeft

b de grafieken van f en f^{inv} elkaar snijden in het punt A met $x_A = 4$

c de horizontale en de verticale asymptoot van de grafiek van f elkaar snijden in een punt van de parabool $y = x^2$.

3 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{2 - |x - 1|}$.

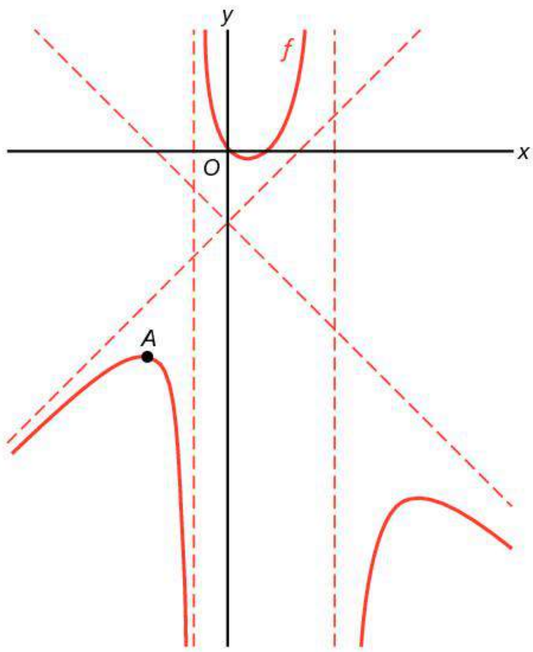
In figuur G.1 zie je de grafiek van f. Het punt A is een top van de grafiek.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Bereken exact de y-coördinaat van A.

c Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen heeft.

d Los exact op $f(x) \leq 2$.



figuur G.1

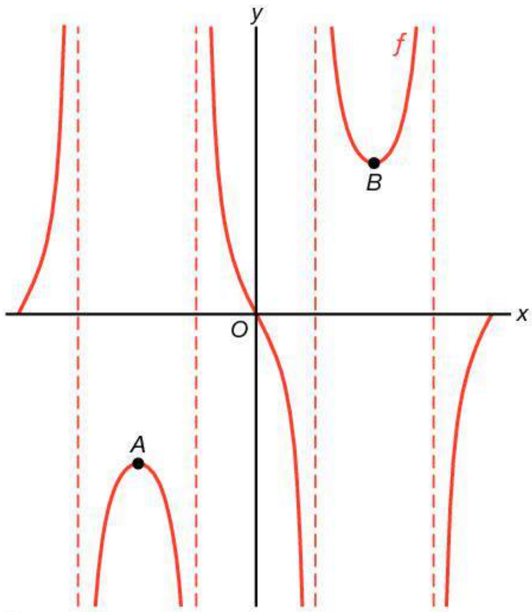
4 Voor x op $[-\pi, \pi]$ is gegeven de functie
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin^2(x) - \frac{1}{2}}.$$
In figuur G.2 zie je de grafiek van f.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Bewijs dat de lijn k door de toppen A en B van de grafiek van f door de oorsprong gaat.

De lijn m raakt de grafiek in de oorsprong en snijdt de beide asymptoten die rechts van de y-as liggen in de punten C en D.

c Bereken exact de lengte van het lijnstuk CD.



figuur G.2

5 Gegeven zijn de functies $f_{p,q}(x) = \begin{cases} x^2 + 4px & \text{voor } x < 2 \\ 2x + q & \text{voor } 2 < x < 3 \\ x^3 - 4x + p & \text{voor } x > 3 \end{cases}$

a Bereken exact de waarden van p en q waarvoor $\lim\limits_{x \to 2} f_{p,q}(x)$ en $\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$ bestaan.

b Bereken exact de waarden van p en q waarvoor het punt $A(3, 10)$ een perforatie van de grafiek van f is.

c Bereken exact de waarden van p en q waarvoor $f_{p,q}$ een extreme waarde voor $x = -1$ heeft en $\lim\limits_{x \to 3} f_{p,q}(x)$ bestaat.

6 Gegeven is de functie $f_a(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + 4}{x^2 - 2x}$.

a Voor welke a ligt het punt $A(2, 3)$ op de scheve asymptoot van de grafiek van f_a?

b Voor welke a heeft de grafiek van f_a een top op de lijn $x = 1$?

c Voor welke a is de grafiek van f_a een rechte lijn met één perforatie?

7 Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op en schets de grafiek.

a $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

b $f(x) = \dfrac{|x^3 - 4| + x^2}{x^2 - 1}$

c $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{\ln(x)}{\ln(x) - 2}$

8 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{2e^{-x} - 4}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek van f de formule op.

b Los exact op $f(x) \geq -1$.

c De grafiek snijdt de y-as in A. De lijn k raakt de grafiek in A en snijdt de x-as in het punt B.
Bereken algebraïsch de oppervlakte van driehoek OAB.

9 Gegeven is de functie $f_a(x) = \dfrac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - a}$.

a Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke a de asymptoten van de grafiek van f_a elkaar snijden op de lijn $y = x - 1$.

b Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a een raaklijn met richtingscoëfficiënt 2 heeft in het punt A met $x_A = 1$.

Voor de inverse functie van f_a geldt $f_a^{\text{inv}}(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{ax}{x-2}\right)}$.

c Bewijs dat deze inverse juist is.

10 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{\ln(x^2) - 1}{\ln(x^2) + 1}$.

a Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

b Bereken de coördinaten van de perforatie van de grafiek.

c Los exact op $f(x) \geq \frac{3}{5}$.

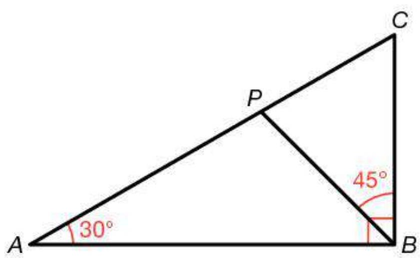
d De raaklijn aan de grafiek van f in het punt A met $x_A = e$ snijdt de x-as in B.
Bereken exact de coördinaten van B.

14 Meetkunde toepassen

11 Van de rechthoekige driehoek ABC is $\angle A = 30°$.
Op de zijde AC ligt het punt P zo, dat $\angle CBP = 45°$.
De omtrek van driehoek ABC is 6.

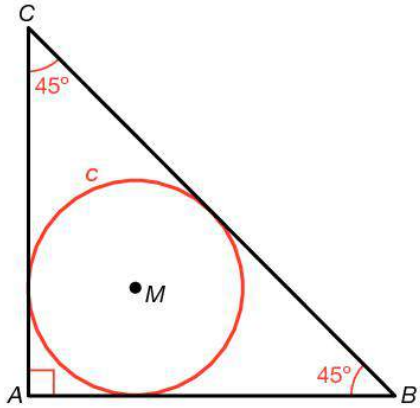
a Bereken AB exact.

b Bereken exact de lengte van AP. Geef het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$.



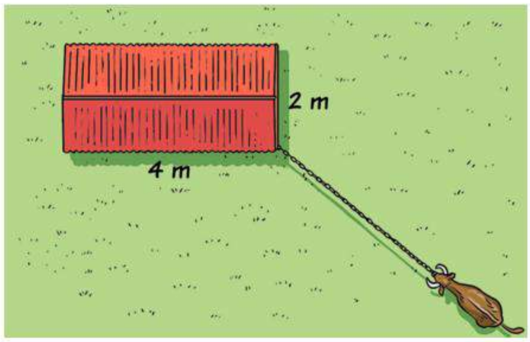
figuur G.3

12 Van de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC is $\angle A = 90°$. De cirkel c met middelpunt M raakt de zijden van de driehoek. Zie figuur G.4.
Verder is gegeven dat $d(A, c) = 1$.
Bereken exact de omtrek van driehoek ABC.



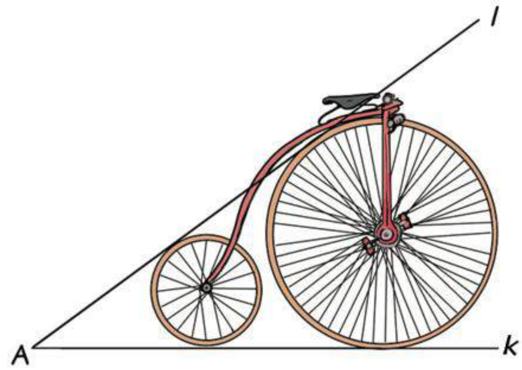
figuur G.4

13 In een weiland staat een schuur met lengte 4 m en breedte 2 m. Een stier zit vast aan een ketting die met het andere uiteinde is vastgemaakt bij een hoek van de schuur. Om te grazen heeft de stier 90 m^2 gras tot zijn beschikking.
Bereken de lengte van de ketting in dm nauwkeurig.



figuur G.5

14 In figuur G.6 zie je een meer dan 100 jaar oude fiets. De straal van het grote wiel is twee keer zo groot als de straal van het kleine wiel. De lijnen k en l raken beide wielen en snijden elkaar in het punt A zo, dat $\cos\angle(k, l) = \frac{41}{49}$. De afstand tussen de beide wielen is 12 cm.
Bereken exact de afstand tussen de middelpunten M en N van de wielen.



figuur G.6

15 Gegeven zijn de lijn k: $y = -3x + 6$ en het punt $M(-2, 2)$.
De cirkel c_1 heeft middelpunt M en raakt k.

a Stel een vergelijking op van c_1.

b Stel een vergelijking op van de cirkel c_2 met middelpunt M die van k een lijnstuk afsnijdt met lengte 4.

c Stel een vergelijking op van de lijnen m_1 en m_2 die loodrecht op k staan en c_1 raken.

d Stel een vergelijking op van de lijnen n_1 en n_2 die door het punt $A(0, -2)$ gaan en c_1 raken.

16 Gegeven is driehoek ABC met $A(2, 1)$, $B(6, 1)$ en $C(2, 4)$.
De bissectrice k van $\angle A$ snijdt de zijde BC in het punt S.

a Stel een vectorvoorstelling op van k en bereken hiermee de coördinaten van S.

b Toon aan dat $\dfrac{BS}{CS} = \dfrac{AB}{AC}$.

In vraag b heb je een voorbeeld gezien van de bissectricestelling:

De bissectrice van een hoek van een driehoek verdeelt de overstaande zijde in stukken die evenredig zijn met de aangrenzende zijden van de driehoek.

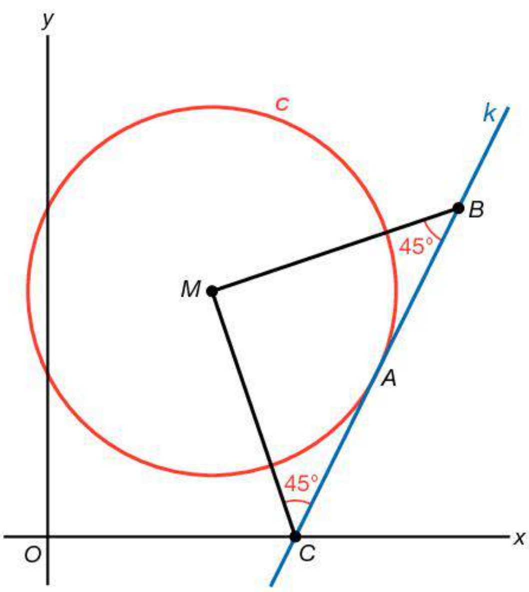
Deze stelling geldt voor elke driehoek.
De coördinaten van het snijpunt T van de bissectrice van hoek B met de zijde AC is volgens de bissectricestelling te berekenen

met $\vec{t} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{p}{p+q} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c Geef p en q en bereken de coördinaten van T.

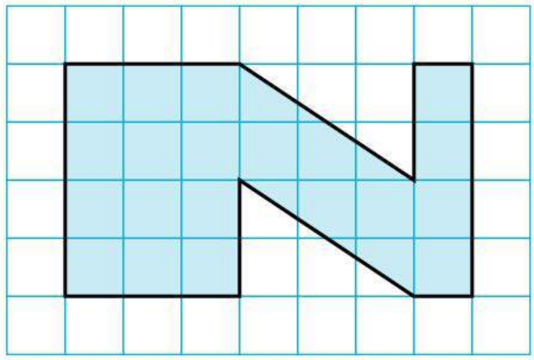
d Bereken de coördinaten van het snijpunt U van de bissectrice van hoek C met de zijde AB.

17 Gegeven is de cirkel c met middelpunt $M(2, 3)$ die door het punt $A(4, 2)$ gaat. De lijn k raakt c in A. De punten B en C liggen op k zo, dat $\angle MBC = \angle MCB = 45°$. Zie figuur G.7.
Bereken exact de coördinaten van B en C.



figuur G.7

18 De vorm in figuur G.8 is ontstaan door twee stukken uit een rechthoek met lengte 7 en breedte 4 weg te laten.
Teken de plaats van het zwaartepunt.



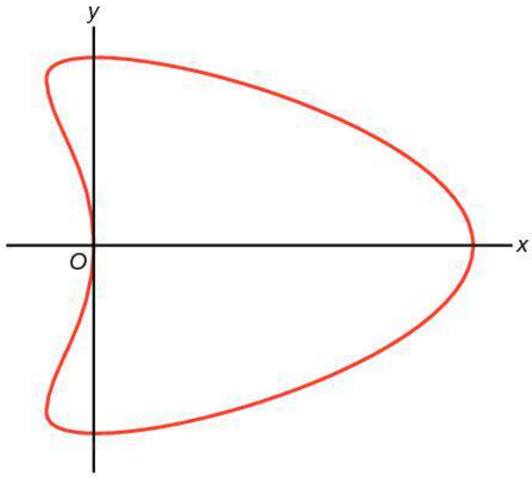
figuur G.8

19 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x = \cos^2(t) - \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$$ met t in seconden en

$-\pi \leq t \leq \pi$ en x en y in cm.

De baan van P is getekend in figuur G.9.



figuur G.9

a Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn horizontaal of verticaal is.

b Bereken exact de baansnelheid waarmee P door de oorsprong gaat.

c Bereken exact de baanversnelling van P op het moment dat P de positieve y-as passeert.

d Bewijs dat de baan van P lijnsymmetrisch is.

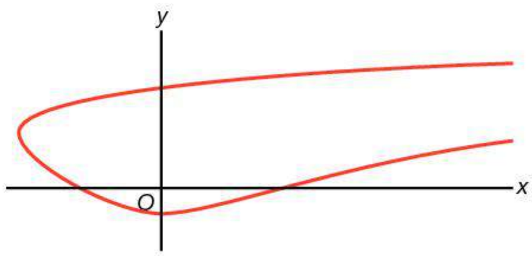
e Bereken exact de coördinaten van de snijpunten C en D van de baan met de lijn $x = \frac{3}{4}$.

f De parabool $y = x^2$ snijdt de baan in de punten O en E. Bereken de coördinaten van E in twee decimalen nauwkeurig.

20 De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x = t^2 - 4t \\ y = \ln\left(t^2 + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$ met t in seconden en x en y in cm.

De baan van P is getekend in figuur G.10.



figuur G.10

a Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn horizontaal of verticaal is.

b Bereken exact de baansnelheid waarmee P de positieve y-as passeert.

c Bereken algebraïsch de baanversnelling van P op het moment dat P de positieve x-as passeert. Rond af op twee decimalen.

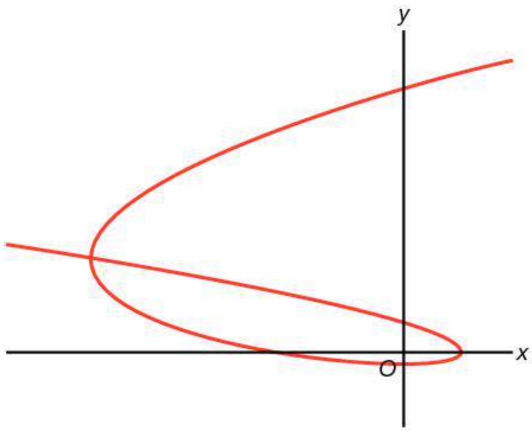
De lijn $x = q$ snijdt de baan in de punten A en B zo, dat $AB = 1$.

d Bereken q in vier decimalen nauwkeurig.

e De raaklijn aan de baan in het punt C is evenwijdig met de lijn k: $3x + 2y = 15$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van C. Rond af op twee decimalen.

21 De baan van een punt P is gegeven door
$\begin{cases} x = t^3 - 3t^2 - 9t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ met t in seconden en x en y in cm.
De baan van P is getekend in figuur G.11.

a Bereken exact voor welke p de lijn $x = p$ de baan in drie punten snijdt.
b Bereken algebraïsch de baansnelheid en de baanversnelling van P op het moment dat P de negatieve x-as passeert. Rond af op twee decimalen.



figuur G.11

De lijn k raakt de baan van P in het punt $A(^-22, 3)$ en de lijn m raakt de baan in het punt $B(^-2, 3)$.
c Bereken exact de coördinaten van het snijpunt S van k en m.

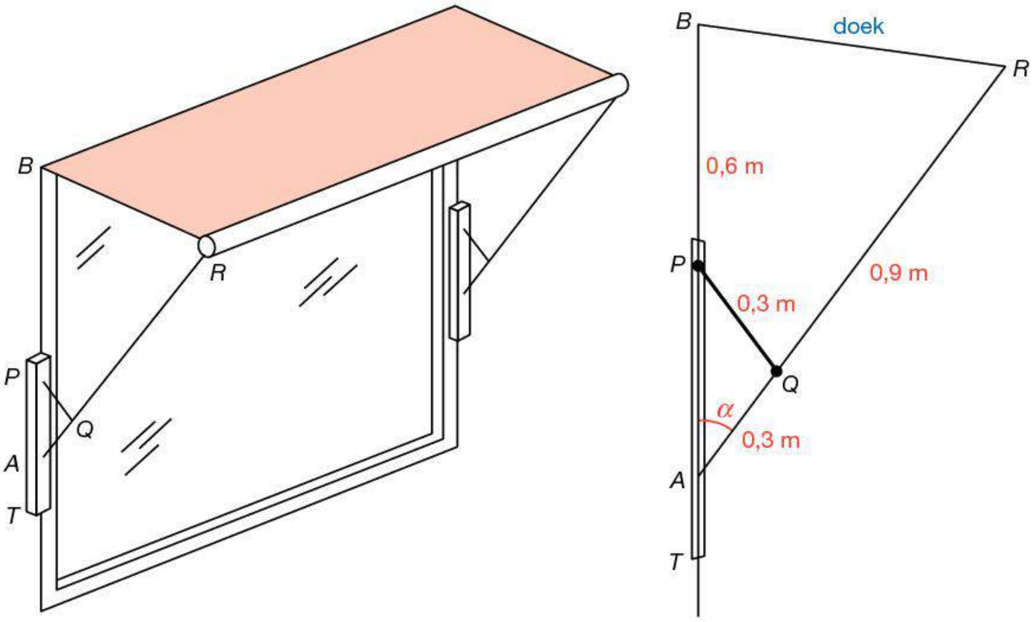
15 Afgeleiden en primitieven

22 Gegeven is de functie $f(x) = \left(x^2 - 1\frac{1}{2}x\right)e^x$.
a Bereken exact de extreme waarden van f.
b Bereken exact de x-coördinaten van de buigpunten van de grafiek van f.
c Onderzoek algebraïsch welke soort van dalen er is in het punt (0, 0).
d De lijnen k en l gaan door $A\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$ en raken de grafiek van f. Stel algebraïsch formules van k en l op.
e De lijn m snijdt de grafiek van f loodrecht in O. Verder snijdt m de grafiek ook in het punt B.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de coördinaten van B.

23 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = p\sqrt{x} - \ln(x)$ met $p > 0$.
a Bereken exact de coördinaten van het buigpunt van de grafiek van f_2.
b Bereken in twee decimalen nauwkeurig de waarde van p waarvoor de top van de grafiek van f_p op de cirkel met middelpunt O en straal 3 ligt.

24 Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ en $g_p(x) = p\sqrt{x}$.
a Onderzoek langs algebraïsche weg of er een waarde van p is waarvoor de grafieken van f en g_p elkaar raken.
b Bereken de waarde van p waarvoor de grafieken van f en g_p elkaar loodrecht snijden.
c De grafieken van f en g_p snijden elkaar in het punt S met $x_S = 1$. Voor de bijbehorende waarde van p is V het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g_p en de y-as.
Bereken exact de oppervlakte van V.

25 In figuur G.12 zie je een ruimtelijke tekening en een zijaanzicht van een zonnescherm met glijarm AR.
Het uiteinde A van de stang AR kan glijden in de goot PT. De staaf AR is in Q scharnierend verbonden met de stang PQ die in P scharnierend aan de muur is bevestigd. De afmetingen staan in de figuur.



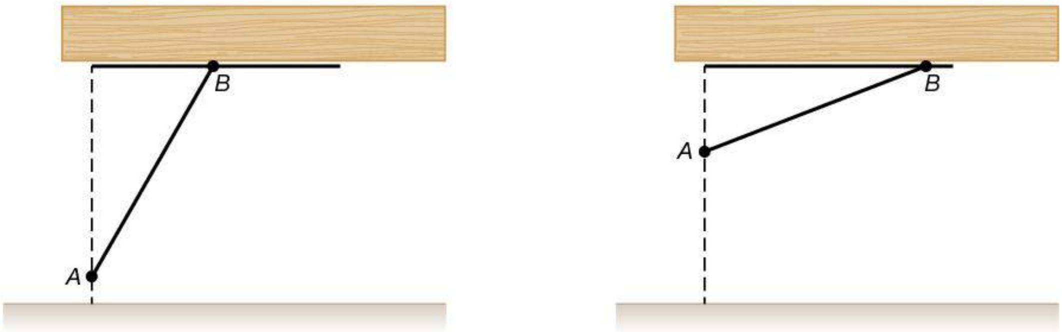
figuur G.12

De lengte BR van het uitgerolde doek hangt af van α met α in radialen. Voor BR geldt de formule

$$BR = \sqrt{1{,}8 - 0{,}72\cos(\alpha) - 1{,}08\cos^2(\alpha)}.$$

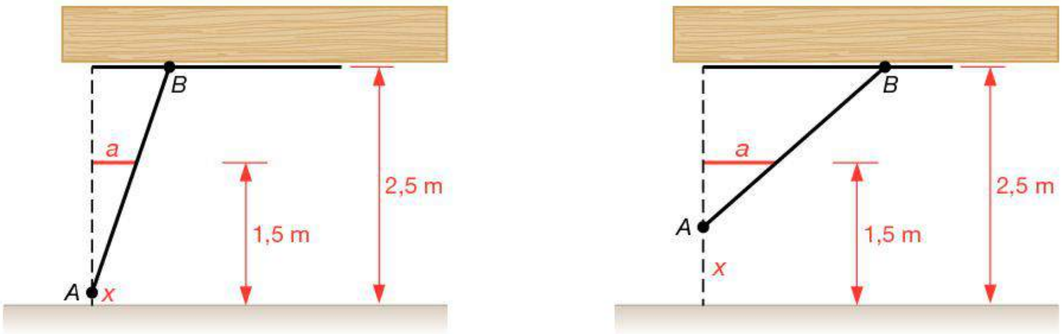
a Bewijs dat deze formule juist is.
b Bereken in twee decimalen nauwkeurig bij welke hoek de lengte van het uitgerolde doek meer is dan 1 m.
c Bereken algebraïsch bij welke hoek BR maximaal is. Rond het antwoord af op twee decimalen.

26 Bij het openen van een garagedeur komt de onderkant van de deur verticaal omhoog, terwijl de bovenkant horizontaal langs het plafond naar binnen schuift. In figuur G.13 zie je twee keer een zijaanzicht van de situatie.
De garagedeur is 2,5 m hoog, dus $AB = 2{,}5$.



figuur G.13 Tijdens het openen schuift A omhoog en B naar rechts.

We vragen ons af hoe ver de deur op een hoogte van 1,5 m boven de grond maximaal naar binnen komt. We noemen deze afstand a. Zie figuur G.14.



figuur G.14

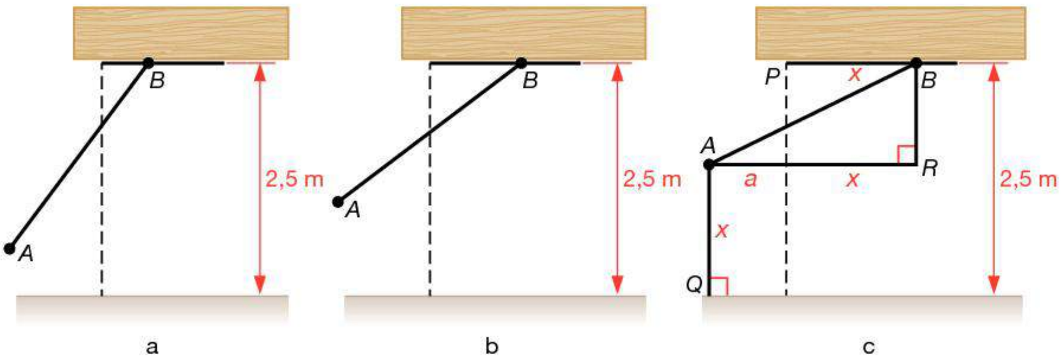
Noem de afstand van A tot de grond x m. Voor a geldt de formule $a = \dfrac{(1{,}5 - x)\sqrt{5x - x^2}}{2{,}5 - x}$ met a in meter.

a Bewijs dat deze formule juist is.

b Bereken in cm nauwkeurig de maximale waarde van a. Hoeveel cm is de onderkant van de deur dan omhoog geschoven?

c Waarom zou het van belang kunnen zijn de maximale waarde van a te kennen?

27 Bij de garagedeur in figuur G.15 gaat het punt B even ver naar binnen als het punt A omhoog gaat.
Bereken algebraïsch hoe ver de onderkant van de deur maximaal naar buiten komt. Rond het antwoord af op twee decimalen.



figuur G.15

28 Gegeven zijn de functies $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $g(x) = \frac{3}{4}x - 4$ en $h(x) = -\frac{4}{3}x + 10$.
De lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in het punt A, de grafiek van g in het punt B en de grafiek van h in het punt C.

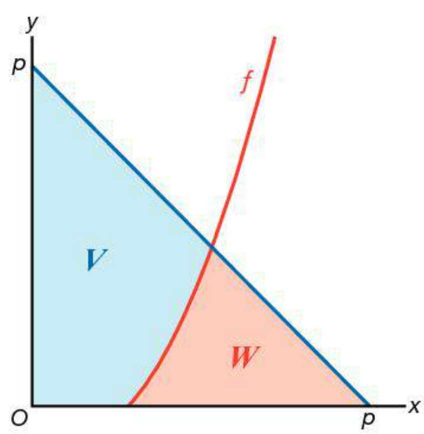
a Bereken met behulp van differentiëren de maximale lengte van het lijnstuk AB.
b Bereken met behulp van differentiëren de minimale lengte van het lijnstuk AC.

29 Gegeven zijn de functies $f(x) = -3 + \sqrt{2x + 3}$ en $g_p(x) = p(x - 3)$.

a Bereken langs algebraïsche weg de hoek tussen de grafieken van f en g_1 in het snijpunt $A(3, 0)$. Rond af op één decimaal.
b Bereken de waarde van p waarvoor de grafieken van f en g_p elkaar loodrecht snijden.
c Bereken in twee decimalen nauwkeurig de waarden van p waarvoor de grafieken van f en g_p elkaar snijden onder een hoek van 50°.
d Bereken exact voor welke p de oppervlakte van het vlakdeel V dat wordt ingesloten door de grafieken van f en g_p en de y-as gelijk is aan $4\sqrt{3}$.

30 Van een gelijkbenige rechthoekige driehoek met rechthoekszijden p met $p > 1$ vallen de benen langs de assen. De driehoek wordt in twee delen verdeeld door de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - x$. Zo ontstaan de vlakdelen V en W. Zie figuur G.16.

a Neem $p = 4$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.
b Bereken in vier decimalen nauwkeurig voor welke p de vlakdelen V en W gelijke oppervlakte hebben.



figuur G.16

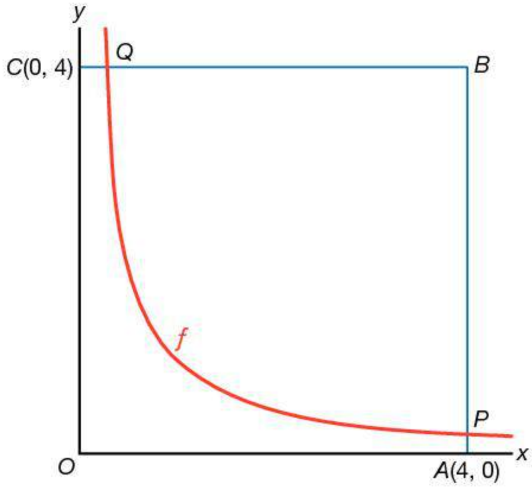
Deze opgave is een bewerking van een examenopgave uit 2006-II.

31 Van een vierkant $OABC$ met zijde 4 ligt A op de positieve x-as en C op de positieve y-as.

Verder is gegeven de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.

De grafiek van f snijdt de zijde AB van het vierkant in het punt P en de zijde BC in het punt Q. Zie figuur G.17.
De raaklijn aan de grafiek van f in het punt met x-coördinaat 2 gaat door het punt A.

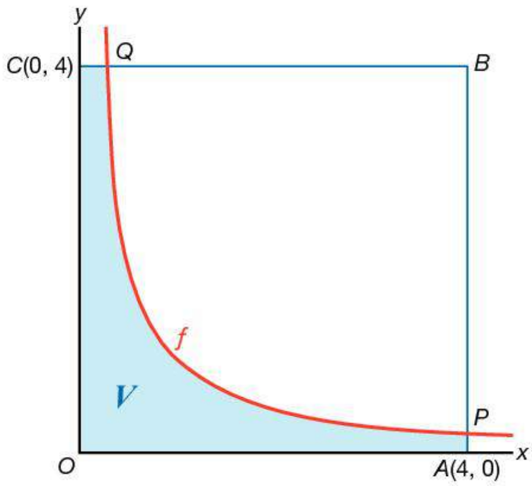
a Bewijs dit.



figuur G.17

De grafiek van f verdeelt het vierkant in twee stukken. Eén van die stukken is in figuur G.18 blauw gekleurd; dat stuk noemen we V.

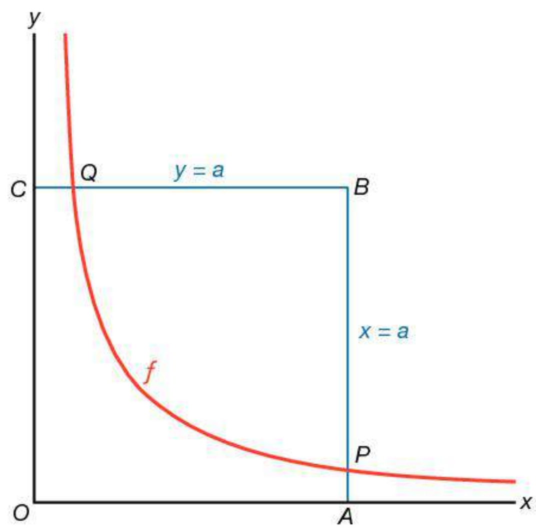
b Bereken exact de oppervlakte van V. Geef het antwoord in de vorm $\ln(c)$.



figuur G.18

Voor de zijde van het vierkant kan ook een andere waarde dan 4 gekozen worden. Noem de zijde a. Zie figuur G.19.
In figuur G.19 is a zodanig gekozen dat de lijn AC niet raakt aan de grafiek van f. Er is één waarde van a waarvoor AC wel raakt aan de grafiek van f.

c Bereken deze waarde van a exact.



figuur G.19

32 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$ met $0 \le t \le 2\pi$.
Bereken exact de baansnelheid waarmee P voor de eerste keer de x-as passeert.

33 Los de vergelijking $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 2 = 0$ exact op.

34 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door
$\begin{cases} x(t) = t^2 - \frac{1}{2}t + 1 \\ y(t) = t^2 - 2t \end{cases}$
Bereken exact de coördinaten van het punt waar de baansnelheid minimaal is.

35 Bereken langs algebraïsche weg voor welke waarde van a de grafieken van $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$ en $g(x) = ax + 5$ elkaar raken.

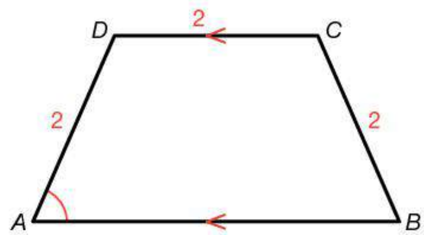
36 Los de vergelijking ${}^{3}\log(x + 1) = 4 + {}^{\frac{1}{3}}\log(x - 1)$ exact op.

37 Gegeven is driehoek ABC met $\angle A = 90°$ en $\angle B = 30°$.
De cirkel c raakt de drie zijden van de driehoek.
Onderzoek of de oppervlakte van de cirkel meer of minder is dan de helft van de oppervlakte van de driehoek.

38 Gegeven is het gelijkbenig trapezium $ABCD$ met $AD = BC = CD = 2$.

a Stel $\angle A = x$ rad en druk de oppervlakte O van het trapezium uit in x.

b Bereken de maximale oppervlakte van het trapezium met behulp van differentiëren. Rond af op twee decimalen.



figuur G.20

39 Bereken exact de oplossingen van $\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)$.

40 V is het linkervlakdeel dat wordt ingesloten door de x-as en de grafieken van $f(x) = 4x - x^2$ en $g(x) = 5 - 2x$.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

41 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \ln\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$, de lijn $y = 1$ en de y-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de y-as.

42 Primitiveer $f(x) = \dfrac{16}{(4x + 10)^5}$ en $g(x) = \cos(\pi(x - 3))$.

43 Gegeven is driehoek ABC met $A(8, 1)$, $B(1, 1)$ en $C(4, 5)$.
De bissectrice van $\angle B$ snijdt de zijde AC in het punt D.
Bereken exact AD.

44 Gegeven zijn de functies $f(x) = \ln(x)$ en $g_p(x) = x^2 + px$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke waarde van p de grafieken van f en g_p elkaar loodrecht snijden.

45 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$
en de lijnen $x = 1$, $x = 4$ en $y = 1$.
a Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.
b Bereken exact de inhoud van het lichaam M dat ontstaat als V wentelt om de lijn $y = 1$.

46 Gegeven is de functie $f_a(x) = (x + a)\ln(x)$.
Bereken exact voor welke waarde van a de grafiek van f_a voor $x = 3$ overgaat van afnemend stijgend naar toenemend stijgend.

47 Gegeven is de cirkel $x^2 + y^2 = 10$. De lijn k raakt c in het punt $A(1, 3)$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door c, k en de x-as.
Bereken exact de inhoud van het lichaam L dat ontstaat als V wentelt om de x-as.

48 Gegeven is dat $2 + \dfrac{3}{x + 4}$ omgekeerd evenredig is met y.
Voor $x = 3$ is $y = 4$.

Bereken $\lim\limits_{x \to \infty} y$ en $\lim\limits_{y \to \infty} x$.

49 Maak x vrij bij de formule $y = 2 + 3^{0,2x - 1}$.

50 De lijnen k en l raken de cirkel c: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 5 = 0$ in de snijpunten van c met de x-as.
Bereken exact de hoek tussen k en l.

51 Bewijs dat de grafiek van $f(x) = 2 + \left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\cos(x)$ lijnsymmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$.

52 Op het interval $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = 1 + \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\pi\right)$.
Los exact op $f(x) > 2$.

53 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 - 6t \\ y(t) = t^2 - 4 \end{cases}$
Bereken de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is aan de x-as of aan de y-as.

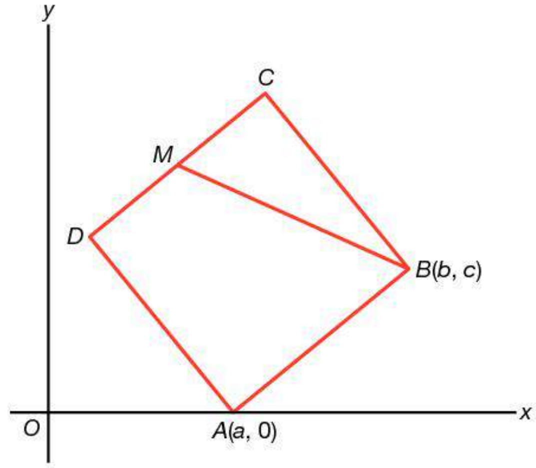
54 Gegeven zijn de punten $A(4, 2)$, $B(1, 6)$ en $C(6, 8)$.
Bereken de hoek tussen de lijnen AB en AC.

55 Bereken exact de afstand van het punt $A(2, 11)$ tot de cirkel c: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$.

56 Bereken de coördinaten van de punten op de cirkel c: $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$ die afstand $\sqrt{2}$ hebben tot de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

57 Bij de grafiek met parametervoorstelling $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = 2\sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right) \end{cases}$ hoort de parabool $y = 2 - 4x^2$ met $-1 \leq x \leq 1$. Toon dit aan.

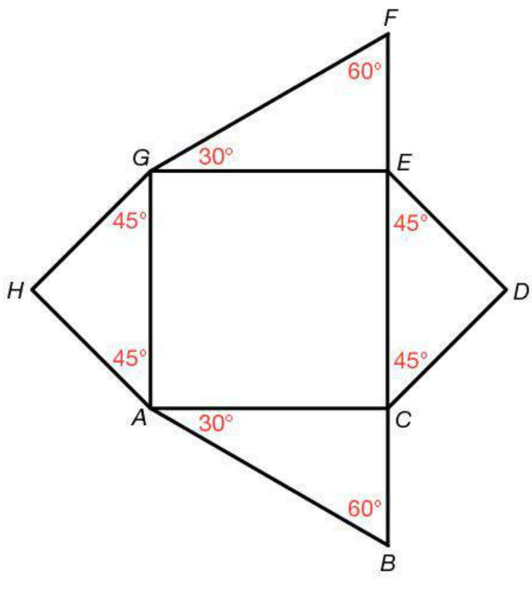
58 Gegeven is het vierkant $ABCD$ met $A(a, 0)$ en $B(b, c)$. Het punt M is het midden van de zijde CD. Bereken exact voor welke positieve waarden van a, b en c geldt dat BM een horizontaal lijnstuk met lengte 3 is en dat D op de y-as ligt.



figuur G.21

59 De lijn k snijdt de assen in de punten $(2p, 0)$ en $(0, p)$. Voor welke p gaat k door het punt $(6, 1)$?

60 De achthoek $ABCDEFGH$ is ontstaan door tegen het vierkant $ACEG$ vier bijzondere driehoeken te plaatsen. Zie figuur G.22. De omtrek van de achthoek is 12. Bereken exact de lengte van AB en schrijf het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$.



figuur G.22

61 De halveringstijd van het isotoop polonium-209 is 103 jaar. Bereken in twee decimalen nauwkeurig met hoeveel procent de hoeveelheid polonium-209 per jaar afneemt.

62 Stel vergelijkingen op van de lijnen k_1 en k_2 door het punt $A(-1, 1)$ die de cirkel c: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ raken.

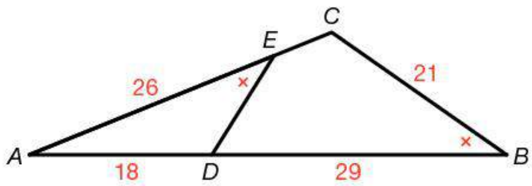
63 Stel van elke asymptoot van de grafiek van $f(x) = \dfrac{\ln(2x) - 1}{\ln(x) + 1}$ de formule op en schets de grafiek van f.

64 Bereken exact de minimale afstand tussen de punten $A(2p, 3)$ en $B(2, p + 1)$.

65 Primitiveer $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 6x + 4 + \sqrt{x}}{x^2}$.

66 Bereken exact het minimum van de functie $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x)}$.

67 In driehoek ABC met $AB = 47$ en $BC = 21$ ligt het punt D zo op AB dat $AD = 18$. Het punt E ligt op AC zo, dat $\angle AED = \angle ABC$.
Verder is gegeven dat $AE = 26$. Zie figuur G.23.
Bereken CE en DE in één decimaal nauwkeurig.



figuur G.23

68 Gegeven is de functie $f_a(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{2x + a}$.
Bereken algebraïsch voor welke a de grafiek van f_a een lijn met een perforatie is.

69 Gegeven zijn de lijn k: $\begin{cases} x = 3t + p \\ y = t + 1 \end{cases}$ en de cirkel c: $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$.
Bereken exact voor welke p de lijn k de cirkel raakt.

70 Gegeven is de samengestelde trilling $u = 2\cos(2t) + 3\sin(2t)$.
Stel de formule op van u in de vorm $u = b\cos(2t - d)$.
Rond b en d af op twee decimalen.

71 Bereken de periode van de samengestelde trilling $u = 3\sin(3t) + 5\sin(5t) + 7\sin(7t)$.

72 Primitiveer $f(x) = \ln(2x^3) + e^{2x + 4}$.

73 Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f(x) = \dfrac{1}{2\sin(x) - 1}$.

De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = \frac{1}{2}\pi$ en snijdt de asymptoten van de grafiek in de punten B en C.
Bereken exact de coördinaten van B en C.

74 Voor elke waarde van $p > 0$ is gegeven de functie $f_p(x) = \dfrac{2x}{x^2 + p}$.

De grafiek van f_p heeft twee toppen A en B.
Bereken exact voor welke p de afstand tussen A en B gelijk is aan 4.

75 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = e^x$, de y-as en de lijn $y = p$.
Bereken exact voor welke waarde van p de oppervlakte van V gelijk is aan 1.

76 Primitiveer $f(x) = \cos^2(4x) + \sin^2(6x)$.

77 Stel vergelijkingen op van de cirkels c_1 en c_2 waarvan de middelpunten op de lijn k: $x + 7y = 21$ liggen en die de lijnen l: $x + 2y = 1$ en m: $2x - y = 2$ raken.

78 Gegeven zijn de functies $f(x) = {}^3\log(x + 2)$ en $g(x) = 1 + {}^3\log(2x - 11)$.
Los exact op $f(x) \geq g(x)$.

79 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \sin\left(t - \frac{1}{4}\pi\right) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Bereken in graden nauwkeurig de hoek die de baan van P maakt met de positieve x-as.

80 Bereken langs algebraïsche weg de hoek waaronder de grafieken van $f(x) = \sqrt{x + 4}$ en $g(x) = 2 + \sqrt{x - 4}$ elkaar snijden.

81 Bereken op $[0, 2\pi]$ exact de oplossingen van de vergelijking $2\cos^2(x) + \sin(x) - 2 = 0$.

82 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t \\ y(t) = t^2 - 4t + 4 \end{cases}$

De baan snijdt zichzelf in een punt waarin de raaklijn aan de baan verticaal is.
Bereken in graden nauwkeurig de hoek waaronder de baan zichzelf snijdt.

83 Gegeven is de functie $f_a(x) = \dfrac{\ln(ax^2) + 2}{\ln(x) + 4}$.

Bereken exact voor welke a de grafiek van f_a een perforatie heeft.

84 Bereken exact de oplossingen op $[0, 2\pi]$ van $2\sin(2x) = -\sqrt{3}$.

85 Voor x op $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie $f_a(x) = \dfrac{\sin^2(x) - a\cos(x)}{\sin(x) + \frac{1}{2}}$.

Bereken algebraïsch voor welke a de grafiek van f_a een perforatie heeft.

86 Gegeven is de lijn k door de punten $A(-3, -43)$ en $B(3, -25)$ en de lijn l: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

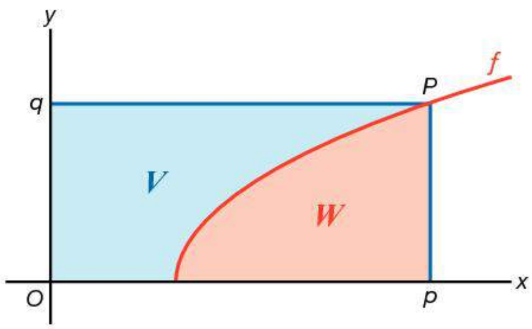
Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van k en l.

87 Een voorwerp in rust ondergaat gedurende vijf seconden de versnelling $a(t) = 0{,}012t^2$. Hierin is a in m/s^2 en t in seconden.
Na vijf seconden verandert de snelheid niet meer.
Hoeveel meter wordt in de eerste tien seconden afgelegd?

88 Stel van elke asymptoot van de grafiek van $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{1 - 2e^x}$ de formule op en schets de grafiek van f.

89 Bereken de hoek tussen de lijnen k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en l: $2x + 3y = 10$.

90 Het punt $P(p, q)$ ligt op de grafiek van $f(x) = \sqrt{x - 1}$.
Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as, de y-as en de lijn $y = q$.
Het vlakdeel W wordt ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn $x = p$. Zie figuur G.24.
Het lichaam L ontstaat als V wentelt om de y-as en het lichaam M ontstaat als W wentelt om de x-as.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig voor welke p geldt dat $I(L) = 2\,I(M)$.



figuur G.24

91 Los de vergelijking $e^{2x} - 6e^{x+1} + 5e^2 = 0$ exact op.

92 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5x + 8}{x^2 - 1}$.
Stel van elke asymptoot van de grafiek de formule op.

93 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$.
Bereken exact voor welke p de vergelijking $f(x) = p$ precies twee oplossingen heeft.

94 Het vlakdeel V wordt ingesloten door de grafiek van $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$, de x-as en de lijn $x = p$ met $p > 0$.
Bereken exact voor welke p de oppervlakte van V gelijk is aan 10.

95 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{(x + 1)^2}$.
Onderzoek algebraïsch van welke soort van stijgen of dalen er sprake is in de punten A, B en C van de grafiek van f met $x_A = -3$, $x_B = 1$ en $x_C = 3$.

96 De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \sin(x)$ door eerst de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met 2 en vervolgens de translatie $\left(-2, \frac{1}{4}\pi\right)$ toe te passen.
Stel het functievoorschrift van f op.

97 De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t \\ y(t) = t^2 - 2t + 1 \end{cases}$
Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling van P in het raakpunt van de baan met de x-as.

98 Gegeven zijn de functies $f(x) = e^{2x-3}$ en $g(x) = 3x - 1$.
De snijpunten van de grafieken van f en g zijn A en B met $x_A < x_B$.
De lijn $x = p$ met $x_A < p < x_B$ snijdt de grafieken in de punten C en D.
Bereken exact de maximale lengte van het lijnstuk CD.

99 Hoe ontstaat de grafiek van $f(x) = -2 + {}^5\log(2x - 3)$ uit de standaardgrafiek $y = {}^5\log(x)$?

100 Herleid $-\cos\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$ tot de vorm $\sin(ax + b)$.

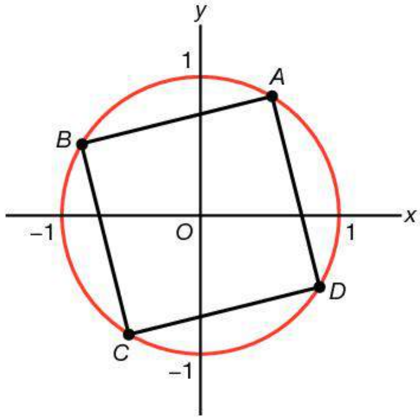
101 Primitiveer $f(x) = \dfrac{4x - 3}{2x + 1}$.

102 Gegeven is driehoek ABC met $\angle A = 90°$ en $\angle B = 30°$.
Bereken exact $\cos(15°)$ met behulp van de bissectrice van $\angle B$.
Schrijf het antwoord in de vorm $a\sqrt{b + \sqrt{c}}$ met b en c geheel.

103 Stel vergelijkingen op van de lijnen met richtingscoëfficiënt 2 die de cirkel c: $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ raken.

104 Gegeven is de functie $f(x) = a + \dfrac{x + 1}{x - 1}$.
Bereken exact voor welke a de functie $g(x) = \dfrac{x - 4}{x - 6}$ de inverse is van f.

105 Op de eenheidscirkel ligt het vierkant $ABCD$.
A is het punt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.
Bereken exact de coördinaten van de punten B, C en D.

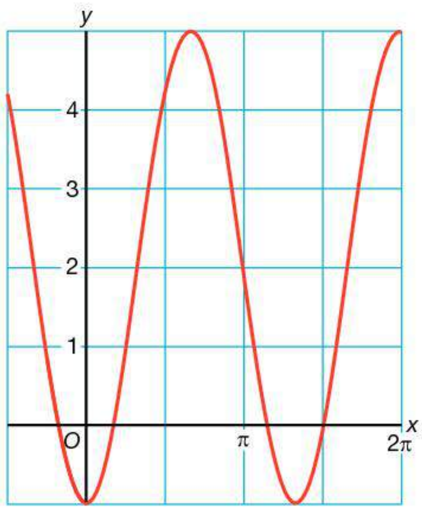


figuur G.25

106 Herleid de formule $y = \cos^4(x)$ tot de vorm
$y = a + b\cos(2x) + c\cos(4x)$.

107 Differentieer $f(x) = x \cdot \tan^3\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right)$.

108 In de figuur hiernaast is een sinusoïde getekend.
Stel bij de sinusoïde een formule op van de vorm $y = a + b\sin(c(x - d))$ met $b < 0$ en een formule van de vorm $y = a + b\cos(c(x - d))$ met $b > 0$.



figuur G.26

109 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door $\begin{cases} x(t) = 4 - t^2 \\ y(t) = t^3 - 3t \end{cases}$
Bereken exact de baansnelheid en de baanversnelling in het snijpunt van de baan van P met de positieve y-as.

110 Bereken de afgeleide van $f(x) = \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{x^2}$.

111 De baan van een punt P is gegeven door de bewegingsvergelijkingen $x(t) = 2 + 4\cos(2t)$ en $y(t) = 1 + 4\sin(2t)$ met t in seconden en t op $[0, \pi]$.
Bereken exact hoeveel seconden P zich links van de y-as boven de lijn $y = 1$ bevindt.

112 Bereken in één decimaal nauwkeurig de hoek tussen de lijnen
k: $2x + 3y = 12$ en l: $\begin{cases} x = -3t - 10 \\ y = 7t + 2 \end{cases}$

113 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^{2x} - 3}$.
Schets de grafiek van f en bereken exact het bereik van f.

114 Los de vergelijking $25^x + 6 = 5^{x+1}$ exact op.

115 Gegeven zijn het punt $A(10, 0)$ en de cirkel
c_1: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$.
Het punt P doorloopt c_1 en het punt Q is het midden van AP.
Zo doorloopt Q de cirkel c_2.
Stel van c_2 een vergelijking op van de vorm
$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

116 Stel vergelijkingen op van de lijnen door $A(0, 5)$ die een hoek van 20° maken met de lijn door $B(4, 2)$ en $C(6, 2)$. Rond zo nodig af op twee decimalen.

117 Bereken exact de afstand van het punt $A(9, 2)$ tot de lijn k door de punten $B(-1, 2)$ en $C(0, 1)$.

118 Stel een vergelijking op van de cirkel c met middelpunt $A(8, 5)$ die de lijn k: $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 1 \end{cases}$ raakt.

119 Los de vergelijking $\ln^2(x) - 8\ln(x) + 12 = 0$ exact op.

120 Voor welke a en b vallen de lijnen k: $2x + ay = 12$ en
l: $\begin{cases} x = 3t - 3 \\ y = 2t + b \end{cases}$ samen?

121 Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $A(3, 1)$, $B(8, 1)$, $C(7, 3)$ en $D(6, 3)$.
Teken het zwaartepunt van het trapezium met behulp van vectoren.

122 De bewegingsvergelijkingen van een punt P zijn gegeven door
$\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t \\ y(t) = 2t^2 + 4t \end{cases}$
Bereken exact de coördinaten van de punten van de baan waarin de raaklijn evenwijdig is met de x-as of met de y-as.

Overzicht GR-handleiding

Module

Berekeningen op het basisscherm ▪ Het basisscherm ▪ Eenvoudige berekeningen ▪ Mintekens ▪ Haakjes ▪ Tussenstappen ▪ De toets ANS ▪ Fouten verbeteren ▪ De toets ENTRY/REPLAY ▪ Breuken invoeren ▪ Decimaal getal omzetten in breuk ▪ Breuken vermenigvuldigen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 10
Formules, grafieken en tabellen ▪ Formules invoeren ▪ Grafieken plotten ▪ Het standaardscherm ▪ Formules uitzetten ▪ De trace-cursor ▪ Functiewaarden berekenen met de trace-cursor ▪ Functiewaarden berekenen op het basisscherm ▪ Tabellen maken ▪ Tabelinstelling veranderen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 39
Toppen en snijpunten ▪ Toppen van grafieken ▪ Snijpunten van grafieken ▪ Berekenen van nulpunten	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 39
Helling ▪ De richtingscoëfficiënt van een raaklijn	vwo B deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 60
Het gebruik van Ans en lettergeheugens ▪ De toets ANS ▪ Het gebruik van lettergeheugens	vwo B deel 1 hoofdstuk 4 bladzijde 141
Integreren ▪ Integralen berekenen op het basisscherm ▪ Integralen berekenen op het grafiekenscherm	vwo B deel 3 hoofdstuk 11 bladzijde 140
Allerlei ▪ Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Trefwoordenregister

Verantwoording

Fotoresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam
Illustratieverwerving: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: OKS PrePress

Foto's
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 6-7, 104, 136-137, 220, 229
Getty Images: p. 14
ANP Photo, Rijswijk: p. 46-47
Imageselect, Wassenaar: p. 92-93
Autodemontage Mettler, Schijndel: p. 120
Rue des Archives / Hollandse Hoogte: p. 121
Cito examen vwo Wiskunde B 2012 – tijdvak 1: p. 158 l, r
Dreamstime: p. 176
Cito pilotexamen vwo Wiskunde B 2016 – tijdvak 1: p. 210

Colofon
Omslagontwerp: In Ontwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: OKS PrePress

FSC www.fsc.org MIX Papier van verantwoorde herkomst FSC® C118189

1 / 18

ISBN 978-90-01-84235-2

GETAL&
RUIMTE

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189
www.fsc.org

ISBN 978-90-01-84235-2

9 789001 842352

www.getalenruimte.noordhoff.nl